# MTNM113E: Mátrixok, determinánsok, lineáris egyenletrendszerek

(előadásvázlat)

Kátai-Urbán Kamilla

## 1. Mátrixok

**1. Definíció.** Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, az $A$ $(m \times n)$-es mátrix egy téglalap alakú táblázat, amelynek $m$ sora és $n$ oszlopa van. A táblázat elemei valós számok, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az $A$ mátrix $i$-edik sorának $j$-edik elemét $a_{ij}$-vel jelöljük, bevezetjük a következő jelölést is: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Az $A$ $(m \times n)$-es mátrix általános alakja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

### 1.1. Mátrix műveletek

**2. Definíció.** Az $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok összege:

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

**3. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**4. Tétel.** Tetszőleges $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra érvényesek az alábbiak:

(1) az összeadás kommutatív: $A + B = B + A$;
(2) az összeadás asszociatív: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

**5. Definíció.** Az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral vett szorzata:

$$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

**6. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \end{pmatrix}.$$

**7. Tétel.** Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra érvényesek az alábbiak:

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
(2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
(3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

**8. Definíció.** Az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix transzponáltja az $A^T = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátix, ahol $b_{ij} = a_{ji}$ teljesül bármely $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ esetén.

**9. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**10. Tétel.** Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek az alábbiak:

(1) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
(3) $(A^T)^T = A$.

**11. Definíció.** Az $A$ és $B$ valós mátrixok szorzata $AB$ pontosan akkor létezik, ha az $A$ mátrix oszlopainak száma megegyeik a $B$ mátrix sorainak számával. Ekkor az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és a $B = (b_{ij})_{n\times k} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixok szorzata $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$, ahol

$$AB = \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right)_{m\times k}.$$

**12. Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \;=\; \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix}.$$

**13.*** **Tétel.** Tetszőleges $A, B, C$ valós mátrixok és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén, ha a műveletek elvégezhetők, akkor teljesülnek a következők:

(1) a szorzás asszociatív: $A(BC) = (AB)C$;
(2) a szorzás disztributív az összeadásra: $A(B+C) = AB + AC$ és $(A+B)C = AC + BC$;
(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

**14. Megjegyzés.** A mátrixok szorzása nem kommutatív! Az is lehet, hogy a mátrixok felcserélésével már a szorzás el sem végezhető, de négyzetes ($n \times n$-es) mátrixok esetén sem cserélhetők fel a szorzás tényezői általában.

**15. Jelölés.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

### 1.2. Speciális alakú mátrixok

**16. Definíció.** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot szimmetrikus mátrixnak nevezzük, ha $A^T = A$ teljesül.

**17. Definíció.** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix főátlójának az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemeket nevezzük.

**18. Definíció.** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix felső (alsó) trianguláris, ha a főátlója alatt (felett) minden elem nulla.

**19. Definíció.** Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonális, ha a főátlóján kívül minden elem nulla.

**20. Definíció.** Az $n \times n$-es egységmátrix olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1-es:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

**21. Definíció.** Az $n \times n$-es nullmátrix (zérómátrix) az a mátrix, amelynek minden eleme 0:

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

**22. Tétel.** Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re teljesülnek a következők:

(1) $AE_n = E_nA = A$;
(2) $AZ_n = Z_nA = Z_n$.

## 2. Determinánsok

Csak négyzetes ($n \times n$-es) mátrixoknak van determinánsa. Az $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám, melynek jele: $|A|$ vagy $\det(A)$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az $n$ természetes számot a $\det(A)$ determináns rendjének nevezzük.

Az $1 \times 1$-es $A = (a)$ mátrix determinánsa: $|A| = a$. Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív, egy $n \times n$-es mátrix determinánsához $n$ darab $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát kell kiszámolni. A determináns rekurzív megadásához szükségesek a következő definíciók.

**23. Definíció.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns $i$-edik sorának $j$-edik eleméhez tartozó aldeterminláns úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak $i$-edik sorát és $j$-edik oszlopát. A kapott determináns jele: $M_{ij}$.

**24. Definíció.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns $i$-edik sorának $j$-edik eleméhez tartozó $A_{ij}$-vel jelölt adjungált aldetermináns úgy keletkezik, hogy az $M_{ij}$ aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

**25. Példa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**26. Definíció.** Legyen $n \geq 2$ természetes szám, és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor az $|A|$ determináns első sora szerinti kifejtése:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$

A formula segítségével a determináns értéke rekurzív módon számolható.

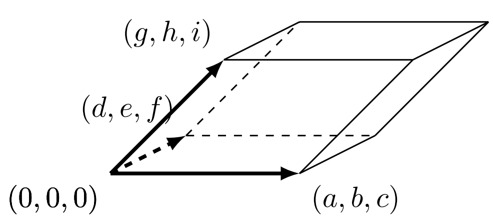
**27. Példa.** Tetszőleges $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot d + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot c = ad - bc.$$

**28. Példa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) + 2\cdot(-4) + 3\cdot 7 = 8.$$

**29. Megjegyzés.** A térben az $(a, b, c)$, $(d, e, f)$, $(g, h, i)$ vektorok és az origó által meghatározott test paralelepipedon.



A paralelepipedon térfogatát a következő determináns abszolútértéke adja meg:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata: $V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|$.

**30.* Tétel (Kifejtési-tétel).** Determináns bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns $i$-edik sora szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

**31. Tétel.** Ha egy determináns főátlója felett (vagy alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

**32.* Tétel.** Legyen $A$ négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

**33. Következmény (Dualitási elv).** Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop” és „sor” szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

**34. Tétel.** Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy $c$ valós számmal, akkor a determináns értéke is $c$-szeresére változik.

**35.* Tétel.** Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke $(-1)$-szeresére változik.

**36. Tétel.** Ha a következő feltételek közül valamelyik teljesül, akkor a determináns értéke nulla:
(1) valamely sorának minden eleme nulla;
(2) valamely két sora azonos;
(3) valamely két sora arányos.

**37. Tétel.** A determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor $c$-szeresét hozzáadjuk.

**38. Megjegyzés.** Ne felejtsük el, hogy a 33. Tétel, a Dualitási elv, a 34.–37. Tételekre alkalmazható, így az állítások oszlopokra is érvényesek.

**39. Példa.** Az előző tétel segítségével „kinullázható” bármely determináns bármely sora vagy oszlopa, azaz elérhető, hogy az adott sorban vagy oszlopban legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon. Ez gyakorlati szempontból azért hasznos, mert kevesebb aldeterminánst kell kiszámolni. A következő determináns esetén a második oszlop második elemének segítségével nullázuk ki az oszlop többi elemét úgy, hogy a második sor kétszeresét kivonjuk az első sorból, illetve hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ezek után a második oszlop szerint kifejtjük a determinánst.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-1)\cdot(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 = 8.$$

**40.* Tétel (A determinánsok szorzástétele).** Ha $A$ és $B$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsaik szorzatával egyezik meg.

## 3. Mátrix inverze (1. rész)

**41. Definíció.** Legyen $A$ négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix inverze $A$-nak, ha $AB = BA = E_n$.

**42. Megjegyzés.** Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az $A$ mátrixnak inverze a $B$ mátrix, akkor $1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$, így $|A| \neq 0$. Tehát, ha $|A| = 0$, akkor nincs inverze $A$-nak.

**43. Tétel.** Ha az $A$ mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Jelölje: $A^{-1}$.

**44.* Tétel.** Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix determinánsa nemnulla, akkor az inverze a következőképpen számítható:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol $A_{ij}$ az $A$ mátrix $a_{ij}$ eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.

**45. Definíció.** Ha az $A$ mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot nemelfajulónak nevezzük. Ha az $A$ mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az $A$ mátrix invertálható.

**46. Következmény.** Az $A$ négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Azaz az $A$ négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha nemelfajuló.

**47. Példa.** Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = 1 \neq 0$, így $A$ invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**48. Tétel.** Legyen $A$ és $B$ tetszőleges $(n \times n)$-es invertálható mátrix, ekkor

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**49. Definíció.** Ha $A$ invertálható mátrix, akkor definiálhatók $A$ negatív egész kitevős hatványai:

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

**50. Tétel.** Tetszőleges $n \times n$-es $A$ mátrix esetén legyen $A^0 = E_n$. Legyen $A$ tetszőleges invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor

(1) $A^m A^k = A^{m+k}$,
(2) $(A^m)^k = A^{mk}$.

**51. Megjegyzés.** Mátrixok inverze a 44. Tételtől eltérő módon is meghatározható, pl. az ún. Gauss-elimináció segítségével. Ezt a megoldási módot a Lineáris egyenletrendszerek fejezet után ismertetjük.

## 4. Lineáris egyenletrendszerek

**52. Definíció.** Egy $m$ egyenletből álló, $n$-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Az egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ alakban is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Az $A$ mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$A|\underline{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

### 4.1. Cramer-szabály

**53. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer szabályos, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik, azaz együtthatómátrixa négyzetes, továbbá együtthatómátrixának determinánsa nem 0.

**54.* Tétel (Cramer-szabály).** Ha az

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (1 \le i \le n).$$

**55. Megjegyzés.** A Cramer-szabály azt mondja ki, hogy szabályos lineáris egyenletrendszer esetén az $x_1, \dots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek. A tétel meg is határozza, hogy melyek ezek az értékek: $x_i$ értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos), a számlálóban pedig az $i$-edik oszlopot kicseréljük a jobb oldali konstansok $\underline{b}$ oszlopával. Mivel a Cramer-szabály csak szabályos egyenletrendszer esetén ad megoldást, a gyakorlatban általában más módszert, pl. Gauss-eliminációt, használunk a lineáris egyenletrendszer megoldására.

### 4.2. Gauss-elimináció

**56. Definíció.** A bővített mátrix elemi átalakításai (az egyenletrendszer átalakításai):

(1) Két sor (egyenlet) felcserélése.
(2) Egy sor (egyenlet) szorzása egy tetszőleges nemnulla valós számmal.
(3) Valamelyik sorhoz (egyenlethez) egy másik sor (egyenlet) számszorosának hozzáadása.

**57. Definíció.** A bővített mátrix lépcsős alakú, ha bármely sorának első nullától különböző eleme alatt csak nullák állnak, továbbá minden sorban az első nem nulla elem hátrébb van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme.

**58.* Tétel.** Elemi átalakításokkal tetszőleges lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa lépcsős alakra hozható.

**59.*** **Állítás.** Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában ellentmondó sor szerepel, ami a következő alakú: $\big(0 \dots 0|c\big)$, ahol $c \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$.

**60. Definíció.** A lineáris egyenletrendszer egy változóját szabad változónak nevezzük, ha tetszőleges valós számot felvehet értékként, különben a változót kötött változónak nevezzük.

### 4.3. Lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma

1. eset: Ha a Gauss-elimináció során ellentmondó sort találunk, akkor **nincsen megoldás**.
2. eset: Ha van megoldás (azaz nincsen ellentmondó sor a Gauss-elimináció során), és a bővített mátrix lépcsős alakjában kevesebb nem-0 sor van, mint ahány változó szerepel az egyenletrendszerben, akkor van szabad változó, és így **végtelen sok megoldás** van, hiszen a szabad változók tetszőleges valós számot felvehetnek értékként.
3. eset: Ha van megoldás, de nincs szabad változó, az akkor fordul elő, ha a bővített mátrix lépcsős alakjában pontosan annyi nem-0 sor van, mint ahány változó szerepel az egyenletrendszerben. Így minden változó kötött, azaz értékük egy-egy valós szám, így **pontosan egy megoldás** van.

**61. Példa.**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó ($x_2$).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

## 5. Mátrix inverze (2. rész)

**62. Kiszámítási módszer.** Tetszőleges nemelfajuló négyzetes mátrix inverzét Gauss-elimináció segítségével is meg lehet határozni. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, amelynek determinánsa nem 0. Ekkor az $A$ mátrixnak van inverze, és $AA^{-1} = E_n$, tehát $A^{-1}$ az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldása. Ez a mátrixegyenlet felírható több olyan lineáris egyenletrendszerként, ahol az együtthatómátrix minden esetben $A$, a jobboldali konstansok pedig rendre az $E_n$ mátrix oszlopvektorai. Jelölje $\underline{e}_i$ az $E_n$ mátrix $i$. oszlopvektorát, azaz azt az $n$-komponensű oszlopvektor, amelynek $i$. komponense 1 a többi pedig 0.

Ha megoldjuk az $A\underline{x} = \underline{e}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ lineáris egyenletrendszereket, akkor minden egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van (ld. Cramer-szabály), ezen megoldásvektorok rendre az $A$ mátrix inverzének az oszlopai. Mivel az együtthatómátrix minden lineáris egyenletrendszernél $A$, így az összes egyenletrendszert egyszerre is megoldhatjuk Gauss-elimináció segítségével.

$$\left( \, A \mid E \, \right) \sim \dots \sim \left( \, E \mid A^{-1} \, \right).$$

**63. Példa.** Meghatározzuk Gauss-eliminációval a következő $A$ mátrix inverzét:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]+2\times[1.],\ [3.]+(-3)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{[1.]+2\times[2.]}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)\times[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]+(-2)\times[3.],\ [2.]+(-1)\times[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$