MTN814KG Absztrakt algebra gyakorlat

2021. február 8.

1. Csoportelméleti ismétlő feladatok

1.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) csoport fogalma, példák, számolás csoportokban;
(b) csoportelemek hatványozása, rendje;
(c) részcsoport, generálás, ciklikus csoportok;
(d) csoportizomorfizmus, izomorf csoportok;
(e) részcsoport szerinti mellékosztályozás, Lagrange-tétel!

1.2. Feladat. Adja meg a G csoport azon elemeit, amelyek előállnak a $g(\in G)$ elem

(i) pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve pozitív egész számú többszöröseiként;
(ii) egész kitevős hatványaiként, illetve egész számú többszöröseiként;

valamint állapítsa meg a g elem rendjét:

(a) $G = \mathbb{Z}$, $g = 7$;
(b) $G = \mathbb{Z}_{10}$, $g = \overline{8}$;
(c) $G = \mathbb{Z}_{11}^*$, $g = \overline{3}$;
(d) $G = \mathbb{Q}^*$, $g = 12$;
(e) $G = \mathbb{Q}^*$, $g = -1$;
(f) $G = S_5$, $g = (152)(23)$;
(g) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$, $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
(h) $G = D_6$, g a középpont körüli $\frac{2\pi}{3}$ szöggel való forgatás!

1.3. Feladat. Adja meg a G csoport összes k rendű elemét:

(a) $G = S_7$, $k = 6, 12$;
(b) $G = D_{12}$, $k = 4, 12$;
(c) $G = \mathbb{C}^*$, $k = 3, 4, 6$!

1.4. Feladat. Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám!

1.5. Feladat. Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott G csoportban:

(a) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{k \in \mathbb{Z} : 5 \mid k\}$;
(b) $G = S_4$, H a fixponttal rendelkező permutációk halmaza S_4-ben;
(c) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \mathbb{Z}_{12}^*$;
(d) $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{5}\}$;
(e) $G = Q$, $H = \{1, -1, i, j\}$;
(f) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3)$, $H = \{A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3) : |A| > 0\}$!

1.6. Feladat. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(a) $G = \mathbb{Z}_{10}$, $A = \{\overline{8}\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}_8$, $A = \{\overline{2}, \overline{5}\}$;
(c) $G = S_5$, $A = \{(1234), (13)\}$;
(d) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $A = \{\overline{4}, \overline{7}\}$;
(e) $G = D_4$, $A = \{a^2, at\}$, ahol a a középpont körüli $\frac{\pi}{2}$ szöggel való forgatást, t pedig az egyik tengelyes tükrözést jelöli!

1.7. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_8$ ciklikus csoport összes generátorelemét! Oldja meg a feladatot 8 helyett tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén is!

1.8. Feladat. Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_7^*$ csoport? Ha igen, akkor állapítsa meg, mely elemei generálják!

1.9. Feladat. Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok! Adjon meg bennük két-két minimális generátorrendszert:

(a) S_4, (b) D_4, (c) $\mathbb{Z}_{14}^*$, (d) $\mathbb{Z}_{12}^*$!

1.10. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve:

(a) $\mathbb{Z}_{14}$, (b) $\mathbb{Z}_{14}^*$, (c) $\mathbb{Z}_{12}^*$, (d) $\mathbb{Z}$, (e) D_4, (f) D_6, (g) S_3, (h) Q!

1.11. Feladat. Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(a) $\mathbb{Z}_8^*$ és $\mathbb{Z}_4$, (b) $\mathbb{Z}_7^*$ és $\mathbb{Z}_6$, (c) $\mathbb{Z}_8^*$ és $\mathbb{Z}_{12}^*$, (d) S_3 és D_3, (e) S_3 és $\mathbb{Z}_6$, (f) D_4 és Q!

1.12. Feladat. Mutassa meg, hogy az S_4 csoportnak nincs Q-val izomorf részcsoportja!

1.13. Feladat. Az $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}^*$ csoportok között van-e két egymással izomorf?

1.14. Feladat. Adja meg az alábbi csoportok Cayley-reprezentációját:

(a) $\mathbb{Z}_4$, (b) $\mathbb{Z}_8^*$, (c) A_3, (d) $\mathbb{Z}$!

1.15. Feladat. Határozza meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti bal és jobb oldali mellékosztályozását, és ha G véges, akkor állapítsa meg H indexét G-ben:

(a) $G = \mathbb{Z}_{10}$, $H = [\overline{8}]$;
(b) $G = \mathbb{Z}_{24}^*$, $H = [\overline{5}, \overline{7}]$;
(c) $G = S_3$, $H = A_3$;
(d) $G = S_3$, $H = [(12)]$;
(e) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$,
(f) $G = \mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{R}^*$!

1.16. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Ha a G csoport minden elemének az egységelem a négyzete, akkor G kommutatív.
(b) Ha a G csoport minden elemének negyedik hatványa az egységelem, akkor G kommutatív.
(c) A_8 minden eleme legfeljebb 8-adrendű.
(d) Minden nemtriviális (azaz legalább kételemű) véges csoportban van prímrendű elem.
(e) $\mathbb{Z}$-nek véges sok részcsoportja van.
(f) Ha a nemtriviális G csoportnak nincs valódi nemtriviális részcsoportja, akkor G prímrendű ciklikus csoport.
(g) Tetszőleges $d \mid n$ pozitív egészek és n-rendű G csoport esetén van G-nek d rendű részcsoportja.
(h) Ha a G csoportnak van ciklikus részcsoportja, akkor G is ciklikus.
(i) Ha a G csoportnak minden részcsoportja ciklikus, akkor G is ciklikus.
(j) Minden prímhatványrendű csoport ciklikus.
(k) Bármely végtelen csoportnak minden valódi részcsoportja szerint végtelen sok bal oldali mellékosztálya van.
(l) Van olyan ciklikus csoport, melynek pontosan három részcsoportja van.
(m) Van olyan ciklikus csoport, melynek pontosan három generátoreleme van.

2. Gyűrű- és testelméleti ismétlő feladatok

2.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:
- (a) gyűrű, integritástartomány és test fogalma, számolás gyűrűkben;
- (b) oszthatóság, legnagyobb közös osztó, irreducibilis és prímelemek integritástartományokban;
- (c) az euklideszi gyűrű, prímfaktorizáció;
- (d) testbővítés, minimálpolinom, algebrai bővítés, testbővítés foka;
- (e) egyszerű algebrai bővítések!

2.2. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e a megadott integritástartományokban az alábbi relációk:
- (a) $\mathbb{Z}[i]$-ben $3+4i \mid -4+3i$;
- (b) $\mathbb{Z}[i]$-ben $3+4i \sim -4+3i$;
- (c) $\mathbb{Z}[i]$-ben $3+4i \mid 8-i$;
- (d) $\mathbb{Z}[i]$-ben $3+4i \sim 7-i$;
- (e) $\mathbb{Z}[i]$-ben $3+4i \mid 7+i$;
- (f) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$-ben $3-\sqrt{5}i \mid 14$;
- (g) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$-ben $1-\sqrt{5}i \sim 6$;
- (h) $\mathbb{Z}[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$-ben $3+\sqrt{3}i \mid 6-2\sqrt{3}i$;
- (i) $\mathbb{Z}[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$-ben $\sqrt{3}i \sim \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
- (j) $\mathbb{Z}[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$-ben $4-2\sqrt{3}i \sim 1+3\sqrt{3}i$!

2.3. Feladat. Határozza meg az egységeket az alábbi integritástartományokban:
- (a) $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$;
- (b) $\mathbb{Z}[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]$;
- (c) $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, b$ páratlan$\}$!

2.4. Feladat. Bontsa prímtényezők szorzatára $\mathbb{Z}[i]$-ben a 2, 3, $3+i$ és $1+3i$ elemeket!

2.5. Feladat. A $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ integritástartományban
- (a) adja meg a 9 szám két — nem csak egységtényezőben különböző — felbontását két-két irreducibilis elem szorzatára;
- (b) igazolja, hogy a 3 szám irreducibilis, de nem prím;
- (c) adjon meg két olyan számot, amelynek nincs legnagyobb közös osztója!

2.6. Feladat. Adjon meg két olyan elemet a $\mathbb{Z}[i\sqrt{6}]$ integritástartományban, amelyeknek nincs legnagyobb közös osztója!

2.7. Feladat. Igaz-e, hogy minden véges integritástartomány test?

2.8. Feladat. Legyen $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ és $L = \mathbb{Q}(\pi)$. Az alábbi testbővítések közül melyik véges fokú és melyik algebrai:
- (a) $K \mid \mathbb{Q}$,
- (b) $L \mid \mathbb{Q}$,
- (c) $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}$,
- (d) $\mathbb{C} \mid \mathbb{Q}$,
- (e) $\mathbb{C} \mid \mathbb{R}$,
- (f) $\mathbb{R} \mid K$,
- (g) $\mathbb{R} \mid L$,
- (h) $\mathbb{C} \mid L$?

2.9. Feladat. Legyen $u \in \mathbb{C}$ az $f = x^3 - 2x + 2$ polinom egyik komplex gyöke. Mutassa meg, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett! Adja meg a $\mathbb{Q}(u) \mid \mathbb{Q}$ testbővítés alábbi elemeit a testbővítés standard bázisában (azaz az u elemek „kis kitevős” hatványainak racionális együtthatós lineáris kombinációjaként):
- (a) u^7,
- (b) u^{-1},
- (c) $u^4 + u^{-2}$!

2.10. Feladat. Állítsa elő a racionális számtest alábbi egyszerű algebrai bővítéseiben megadott elemek multiplikatív inverzét a bővítés standard bázisában (azaz az adjungált elem „kis kitevős” hatványainak racionális együtthatós lineáris kombinációjaként):
- (a) $\mathbb{Q}(i)$; i^2, $1+i$;
- (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; $\sqrt{3}$, $2+3\sqrt{3}$;
- (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; $\sqrt[3]{16}$, $4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$;
- (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$; $3+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$!

2.11. Feladat. Igazolja, hogy

(a) $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{3})$;
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$!

2.12. Feladat. Keresse meg az alábbi komplex számok minimálpolinomját $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett:

(a) $1 + i$,
(b) $2 - i\sqrt{5}$,
(c) $\sqrt[3]{6}$,
(d) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{7}}$,
(e) $2 + i\sqrt[3]{4}$,
(f) $\sqrt{3} + \sqrt[4]{3}$!

2.13. Feladat. Határozza meg a $T \mid \mathbb{Q}$ testbővítés fokát az alábbi T testekre:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$,
(b) $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$,
(c) $\mathbb{Q}(1 + i\sqrt{3})$,
(d) $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3})$,
(e) $\mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{3})$,
(f) $\mathbb{Q}(i\sqrt[3]{3})$,
(g) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,
(h) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,
(i) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3 - \sqrt{7}})$!

2.14. Feladat. Egységnyi szakasz két végpontjából kiindulva szerkeszthető-e

(a) $\sqrt{2}$,
(b) $\sqrt{2}\pi$,
(c) $\sqrt{2}\pi^2$,
(d) $\sqrt[3]{2}\pi$

területű kör?

2.15. Feladat. Mely n-re szerkeszthető adott körrel azonos területű szabályos n-szög?

2.16. Feladat. Mutassa meg, hogy van olyan szög, amelyik euklideszi szerkesztéssel nem ötödölhető!

2.17. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Ha egy kommutatív, egységelemes gyűrű zérusosztómentes, akkor test.
(b) Euklideszi gyűrűben minden a egységre $\|a\| = 1$.
(c) Van olyan euklideszi gyűrű, amelyben nem létezik bármely két elemnek legnagyobb közös osztója.
(d) Egy algebrai és egy transzcendens szám összege mindig transzcendens.
(e) Minden algebrai bővítés véges fokú.
(f) Léteznek olyan $u, v \in \mathbb{N}$, $u \neq v$ számok, melyekre $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}(\sqrt{v})$.
(g) A $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt{3})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ test egyenlő.
(h) Ha a z komplex szám esetén $\mathbb{Q}(z) \mid \mathbb{Q}$ algebrai bővítés, akkor z $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomjának nincs racionális gyöke.
(i) Léteznek olyan $u \neq v$ irracionális számok, amelyekre $[\mathbb{Q}(u, v) : \mathbb{Q}] = 7$.
(j) Nincs olyan szög, amely harmadolható euklideszi szerkesztéssel.

3. Algebra, részalgebra, generátorrendszer

3.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) algebra fogalma, csoportok és gyűrűk mint algebrák;
(b) részalgebra fogalma, részcsoport és részgyűrű mint részalgebra;
(c) részhalmaz által generált részalgebra, részcsoport és részgyűrű!

3.2. Feladat. Döntse el, hogy a megadott A algebrában a B részhalmaz részalgebrát alkot-e:

(a) $A = (\mathbb{Z}[i]; +, \cdot)$, $B = \{bi : b \in \mathbb{Z}\}$;
(b) $A = (\mathbb{Z}[x]; +, \cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) \geq 0\}$;
(c) $A = (\mathbb{Z}[x]; +, -, 0, \cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) \geq 0\}$;
(d) $A = (\mathbb{Z}[x]; +, 0, \cdot, 1)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$;
(e) $A = (\mathbb{Z}[x]; +, \cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$;
(f) $A = (\mathcal{P}(X); \cap, X)$, $B = \{Y \subseteq X : |Y| \leq k\}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ és X tetszőleges halmaz!

3.3. Feladat. Tekintsük az $A = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}; \circ)$ algebrát, ahol $(a, b)\circ(c, d) = (a, d)$ tetszőleges $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ esetén. Döntse el, hogy az alábbi B részhalmazok részalgebrát alkotnak-e A-ban:

(a) $B = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}$;
(b) $B = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 0 < ab\}$!

3.4. Feladat. Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az S részhalmaz részgyűrűt alkot-e:

(a) R a páros egész számok gyűrűje, S a 4-gyel osztható egészek halmaza;
(b) $R = \mathbb{Z}[x]$, $S = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) \geq 0\}$;
(c) $R = \mathbb{Z}_{12}$, $S = \mathbb{Z}_{12}^* \cup \{\overline{0}\}$;
(d) $R = \mathbb{Z}[i]$, $S = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a + b\}$;
(e) $R = \mathbb{Z}[i]$, $S = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid ab\}$!

3.5. Feladat. Határozza meg az A algebra X részhalmaza által generált részalgebráját:

(a) $A = (\mathbb{Z}; +)$, $X = \{2, 5\}$;
(b) $A = (\mathbb{Z}; +, -, 0, \cdot)$, $X = \{2, 5\}$;
(c) $A = (\mathbb{Z}_{13}; \cdot)$, $X = \{\overline{5}\}$;
(d) $A = (\mathbb{Z}_{13}; +, \cdot)$, $X = \{\overline{5}\}$;
(e) $A = (\mathbb{Z}[i]; +, \cdot)$, $X = \{i\}$;
(f) $A = (\mathbb{Z}; m)$, $X = \{-2, 2\}$, ahol $m(a, b, c) = a - b + c$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$-re;
(g) $A = (\mathbb{Z}; m)$, $X = \{1, 3, 8\}$, ahol $m(a, b, c) = a - b + c$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$-re;
(h) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $X = \{\{4k : k \in \mathbb{N}\}, \{6k : k \in \mathbb{N}\}\}$;
(i) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, X az $\mathbb{N}$ halmaz végtelen részhalmazainak halmaza;
(j) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap, \cup)$, X az $\mathbb{N}$ halmaz háromelemű részhalmazainak halmaza!

3.6. Feladat. Határozza meg az R egységelemes gyűrű a eleme, illetve X részhalmaza által generált részgyűrűjét, valamint egységelemes részgyűrűjét:

(a) $R = \mathbb{Z}[i]$, $a = 2i$;
(b) $R = \mathbb{Z}[x]$, $a = x - 1$;
(c) $R = \mathbb{Z}[x]$, $X = \{x^2, x^3\}$;
(d) $R = \mathbb{R}$, $a = \sqrt{2}$;
(e) $R = \mathbb{Q}$, $a = \frac{1}{2}$;
(f) $R = \mathbb{Q}$, $X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$;
(g) $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!

3.7. Feladat. Adjon meg minimális generátorrendszert a következő algebrákban:

(a) $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}); \cap)$;
(b) $(\mathbb{Q}^+; \cdot, ^{-1}, 1)$!

3.8. Feladat. Létezik-e háromelemű minimális generátorrendszere a $(\mathbb{Z}; +, -)$ algebrának?

3.9. Feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N};')$ algebra részalgebráit és generátorrendszereit, ahol $n' = n+1$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re!

3.10. Feladat. Tekintsük az $A = (\mathbb{Z}; \ominus)$ algebrát, ahol $a \ominus b = a - b$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$-re. Határozza meg

(a) A összes egy elem által generált részalgebráját,
(b) A összes részalgebráját!

3.11. Feladat. Tekintsük az $A = (\mathbb{Z}; m)$ algebrát, ahol $m(a,b,c) = a-b+c$ tetszőleges $a,b,c \in \mathbb{Z}$-re. Mutassa meg, hogy

(a) bármely n pozitív egészre minden mod n maradékosztály részalgebra A-ban,
(b) A-nak ez az összes részalgebrája!

3.12. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ gyűrűk részgyűrűit és egységelemes részgyűrűit!

3.13. Feladat. Igazolja, hogy ha egy integritástartomány nemtriviális részgyűrűjének van egységeleme, akkor az megegyezik az integritástartomány egységelemével!

3.14. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Ha R_1 részgyűrűje az R_2 gyűrűnek, és R_2 részgyűrűje az R_3 gyűrűnek, akkor R_1 részgyűrűje R_3-nak is.
(b) Kommutatív gyűrű minden részgyűrűje is kommutatív.
(c) Nemkommutatív gyűrű egyetlen részgyűrűje sem kommutatív.
(d) Egységelemes gyűrű minden részgyűrűje is egységelemes.
(e) Végtelen gyűrű minden részgyűrűje végtelen.
(f) Ha S részgyűrű az R gyűrűben, melynek egységeleme e, akkor e az R gyűrűnek is egységeleme.
(g) Egy algebra bármely két generátorrendszerének az egyesítése is generátorrendszer.
(h) Egy algebra bármely két generátorrendszerének a metszete is generátorrendszer.
(i) Van olyan végtelen algebra, amely végesen generált (azaz amelynek létezik véges generátorrendszere).
(j) Van olyan végtelen algebra, amelynek generátorrendszere az üreshalmaz.

4. Kongruencia, kompatibilis osztályozás, faktoragebra; normálosztó, faktorcsoport

4.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) kongruencia és kompatibilis osztályozás fogalma és kapcsolatuk;
(b) csoport normálosztójának fogalma, jellemzései;
(c) faktoralgebra, faktorcsoport!

4.2. Feladat. Döntse el, hogy a ϱ reláció kongruencia-e az A algebrán:

(a) $A = (\mathbb{N}; +)$, $\varrho = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \mid b\}$;
(b) $A = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot)$, $\varrho = \{(a, b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : ab > 0\}$;
(c) $A = (S_5; \cdot)$, $\varrho = \{(\alpha, \beta) \in S_5 \times S_5 : \operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\beta)\}$, ahol $\operatorname{sgn}(\alpha) = 1$ vagy -1 attól függően, hogy $\alpha \in S_5$ páros vagy páratlan permutáció;
(d) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $\varrho = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |X| = |Y|\}$;
(e) $A = (\mathbb{Z}; m)$, $\varrho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a^2 = b^2\}$, ahol $m(a, b, c) = a - b + c$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$-re;
(f) $A = (\mathbb{Z}; +, -, 0, \cdot)$, $\varrho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4 \mid a - b\}$;
(g) $A = (\mathbb{Z}_6; +, -, 0)$, $\varrho = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 : 2a = 2b\}$;
(h) $A = (\mathbb{Z}[i]; +, -, 0, \cdot)$, $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i] : |x| = |y|\}$;
(i) $A = (\mathbb{Z}[x]; +, -, 0, \cdot)$, $\varrho = \{(f, g) \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x] : f(0) = g(0)\}$!

Ha a ϱ reláció kongruencia, akkor adja meg az A/ϱ faktoralgebra elemeit és művelettáblázatait!

4.3. Feladat. Definiáljuk az α relációt $\mathbb{N}$-en a következőképpen: $(x, y) \in \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\{i \in \mathbb{N}_0 : 5^i \mid x\} = \{i \in \mathbb{N}_0 : 5^i \mid y\}$. Igazolja, hogy α kongruencia az $(\mathbb{N}; \cdot)$ algebrán! Igaz marad-e az állítás, ha 5 helyett mindkét helyen 6-ot írunk?

4.4. Feladat. Döntse el, hogy az A algebra $\mathcal{C}$ osztályozása kompatibilis-e:

(a) $A = (S_5; \cdot)$, $\mathcal{C} = \{A_5, S_5 \setminus A_5\}$;
(b) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $\mathcal{C} = \{\{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = k\} : k \in \mathbb{N}_0\}$;
(c) $A = (\mathbb{Z}_9^*, \cdot, ^{-1}, \overline{1})$, $\mathcal{C} = \{\{\overline{2}, \overline{7}\}, \{\overline{1}, \overline{8}\}, \{\overline{4}, \overline{5}\}\}$;
(d) $A = (\mathbb{Z}_9^*, \cdot, ^{-1}, \overline{1})$, $\mathcal{C} = \{\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{7}\}, \{\overline{8}\}, \{\overline{4}, \overline{5}\}\}$;
(e) $A = (\mathbb{Z}_9^*, \cdot, ^{-1}, \overline{1})$, $\mathcal{C} = \{\{\overline{1}, \overline{2}\}, \{\overline{4}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{8}\}\}$;
(f) $A = (\mathbb{Z}; +, -, 0, \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}\}$;
(g) $A = (\mathbb{Z}[i]; +, -, 0, \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\{a + bi : b \neq 0\}, \{a + bi : b = 0\}\}$!

Ha $\mathcal{C}$ kompatibilis osztályozás, akkor adja meg a hozzá tartozó ϱ kongruenciát, valamint az A/ϱ faktoralgebra elemeit és művelettáblázatait!

4.5. Feladat. Döntse el, hogy a G csoport H részcsoportja normálosztó-e! Ha igen, határozza meg a normálosztóhoz tartozó kompatibilis osztályozást és az ehhez tartozó kongruenciát:

(a) $G = \mathbb{Z}_9^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{8}\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{14}\}$;
(c) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$;
(d) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $H = [\overline{4}, \overline{7}]$;
(e) $G = D_3$, $H = [t]$;
(f) $G = D_6$, $H = [a^2]$;
(g) $G = D_6$, $H = \{\mathrm{id}, a^3, t, ta^3\}$;
(h) $G = D_n$ $(n \geq 2)$, $H = [a]$;
(i) $G = D_{2n}$ $(n \geq 2)$, $H = [a^n]$;
(j) $G = S_3$, $H = [(1\,2)]$;
(k) $G = S_4$, $H = V$;
(l) $G = S_4$, $H = [(1\,3), (1\,2\,3\,4)]$;
(m) $G = Q$, $H = [-1]$;
(n) $G = Q$, $H = [i]$;
(o) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$, H a G-beli diagonális mátrixok részcsoportja;
(p) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$, H az egységmátrix nemnulla skalárszorosaiból álló részcsoport!

Ha H normálosztó, akkor adja meg a G/H faktorcsoport elemeit és művelettáblázatát!

4.6. Feladat. Határozza meg a G csoport összes normálosztóját, és adja meg a normálosztók részbenrendezett halmazának Hasse-diagramját:

(a) $G = \mathbb{Z}$;
(b) $G = \mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$;
(c) $G = S_3$;
(d) $G = A_4$;
(e) $G = D_4$;
(f) $G = Q$!

Adja meg elemeivel és művelettáblázatával G összes faktorcsoportját is!

4.7. Feladat. Határozza meg a G/N faktorcsoport aN ill. $a + N$ $(a \in G)$ elemének rendjét:

(a) $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $N = [\overline{5}]$, $a = \overline{7}$;
(b) $G = \mathbb{Z}_6$, $N = [\overline{3}]$, $a = \overline{1}$;
(c) $G = \mathbb{Z}$, $N = [12]$, $a = 7$;
(d) $G = \mathbb{Q}^*$, $N = \{1, -1\}$, $a = \frac{2}{3}$;
(e) $G = \mathbb{C}^*$, $N = \{1, -1\}$, $a = i$;
(f) $G = \mathbb{Q}$, $N = \mathbb{Z}$, $a = \frac{2}{3}$!

4.8. Feladat. Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a G/N faktorcsoportban:

(a) $G = \mathbb{Z}_{18}^*$, $N = [\overline{17}]$, $H = \{N, \overline{5}N\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}_8$, $N = [\overline{4}]$, $H = \{N, \overline{2} + N\}$;
(c) $G = \mathbb{Z}$, $N = [12]$, $H = \{N, 3 + N, 6 + N\}$;
(d) $G = \mathbb{C}^*$, $N = \{1, -1\}$, $H = \{aN : a^n = 1\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges!

4.9. Feladat. Határozza meg a G/N faktorcsoportban az X részhalmaz által generált részcsoportot:

(a) $G = \mathbb{Z}_{18}^*$, $N = [\overline{17}]$, $X = \{5N\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}$, $N = [12]$, $X = \{4 + N, 6 + N\}$;
(c) $G = \mathbb{C}^*$, $N = \{1, -1\}$, $X = \{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)N\}$!

4.10. Feladat. Döntse el, hogy a G/N faktorcsoport H részcsoportja normálosztó-e:

(a) $G = S_4$, $N = V$, $H = [(1\,2\,3)N]$;
(b) $G = S_4$, $N = V$, $H = [(1\,2)N]$!

4.11. Feladat. Igazolja, hogy a $H_1 = \{\overline{1}, \overline{19}\}$ és $H_2 = \{\overline{1}, \overline{9}\}$ részhalmazok normálosztók a $\mathbb{Z}_{20}^*$ csoportban, és állapítsa meg, hogy ciklikusak-e a $\mathbb{Z}_{20}^*$, $\mathbb{Z}_{20}^*/H_1$, $\mathbb{Z}_{20}^*/H_2$ csoportok!

4.12. Feladat. Igazolja, hogy egy G csoport H részcsoportja pontosan akkor normálosztó, ha bármely $a, b \in G$ elemre $ab \in H$ esetén $ba \in H$ is fennáll!

4.13. Feladat. Mutassa meg, hogy ha N 2 rendű normálosztó egy G csoportban, akkor N elemei felcserélhetők G bármely elemével!

4.14. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Véges algebra bármely kompatibilis osztályozásában minden osztály elemszáma azonos.
(b) Véges csoport bármely kompatibilis osztályozásában minden osztály elemszáma azonos.
(c) Abel-csoport minden részcsoportja normálosztó.
(d) Ha egy csoport minden részcsoportja normálosztó, akkor a csoport kommutatív.
(e) Tetszőleges csoport minden kommutatív részcsoportja normálosztó.
(f) Tetszőleges csoport minden normálosztója kommutatív részcsoport.
(g) Tetszőleges csoport bármely 2 rendű részcsoportja normálosztó.
(h) Ha N normálosztó a K csoportban, K pedig normálosztó a G csoportban, akkor N G-nek is normálosztója.
(i) Kommutatív csoport minden faktorcsoportja is kommutatív.
(j) Ciklikus csoport minden faktorcsoportja is ciklikus.
(k) A konjugáltsági reláció minden Abel-csoporton kongruencia.
(l) A konjugáltsági reláció minden csoporton kongruencia.

5. Konjugáltsági reláció, generált normálosztó csoportokban; ideál, faktorgyűrű, generált ideál gyűrűkben

5.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) belső automorfizmusok, konjugáltsági reláció;
(b) részhalmaz által generált normálosztó;
(c) gyűrű kompatibilis osztályozásai és ideáljai;
(d) faktorgyűrű, részhalmaz által generált ideál, főideál!

5.2. Feladat. Határozza meg a következő csoportok konjugáltsági osztályait, és ennek felhasználásával határozza meg a csoportok összes normálosztóját:

(a) S_3;
(b) S_4;
(c) S_5;
(d) Q;
(e) D_4;
(f) D_5!

5.3. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportokban az x elem, illetve X részhalmaz által generált normálosztót:

(a) D_8, $x = a^3t$;
(b) D_{10}, $x = a^6$;
(c) D_{12}, $X = \{a^3, t\}$;
(d) S_4, $x = (1\,2)(3\,4)$;
(e) S_{12}, $x = (9\,11)$;
(f) S_{16}, $x = (4\,8\,12)$;
(g) S_8, $x = (2\,4\,6\,8)$;
(h) S_{10}, $x = (1\,3\,5\,7\,9)$;
(i) A_5, $x = (1\,2\,3\,4\,5)$!

5.4. Feladat. Határozza meg a D_n ($n \geq 3$) csoport összes normálosztóját!

5.5. Feladat. Ha ϱ kongruencia a 4.2. Feladat (f)–(i) részében szereplő gyűrűkön, akkor adja meg a hozzá tartozó ideált!

5.6. Feladat. Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I részhalmaz ideált alkot-e:

(a) R a páros egész számok gyűrűje, I a 4-gyel osztható egészek halmaza;
(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \mathbb{Z}$;
(c) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a, b\}$;
(d) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 4 \mid a,\ 6 \mid b\}$;
(e) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : n \in \mathbb{N},\ 2 \mid a_0\}$;
(f) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : n \in \mathbb{N},\ 2 \mid a_1\}$;
(g) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$,
(h) $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$!

Ha igen, akkor adja meg a hozzá tartozó kompatibilis osztályozást, valamint az R/I faktorgyűrű elemeit és művelettáblázatait!

5.7. Feladat. Határozza meg az R gyűrű X részhalmaza által generált ideálját:

(a) $R = \mathbb{Z}$, $X = \{18, 30\}$;
(b) $R = \mathbb{Z}[x]$, $X = \{4, x\}$;
(c) $R = \mathbb{Q}[x]$, $X = \{x^2 - 4x + 3,\ x^2 + x - 2\}$!

5.8. Feladat. Adja meg az alábbi faktorgyűrűk páronként különböző elemeit és művelettáblázatait:

(a) $\mathbb{Z}_4/\langle\overline{0}\rangle$;
(b) $\mathbb{Z}_8/\langle\overline{4}\rangle$;
(c) $\mathbb{Z}_{16}/\langle\overline{4}\rangle$;
(d) $2\mathbb{Z}/\langle 8\rangle$;
(e) $2\mathbb{Z}_{16}/\langle\overline{8}\rangle$;
(f) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$;
(g) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$;
(h) $\mathbb{Z}[x]/\langle 4, x\rangle$;
(i) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4x,\ x^2 + x\rangle$!

5.9. Feladat. A megadott R gyűrűkre és I részhalmazukra mutassa meg, hogy I ideál R-ben, és adja meg az R/I faktorgyűrűt (melyek R/I páronként különböző elemei, hogyan végezzük rajtuk a műveleteket):

(a) $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$ és $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ 2 \mid a, b, c, d \right\}$;
(b) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ és $I = \{A \in R : A^2 = 0\}$!

5.10. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ gyűrűk ideáljait!

5.11. Feladat. Mutassa meg, hogy a $\mathbb{Z}$ gyűrű bármely m, n elemére

$$\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle \mathrm{lkkt}(m,n) \rangle \quad \text{és} \quad \langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle \mathrm{lnko}(m,n) \rangle!$$

5.12. Feladat. Adjon meg olyan ideált az $\mathbb{R}[x,y]$ kéthatározatlanú polinomgyűrűben, amely nem főideál!

5.13. Feladat. Bizonyítsa be a következő állítást:

Tetszőleges kommutatív R gyűrűben az X részhalmaz által generált ideál a következő:

$$\{k_0x_0 + k_1x_1r_1 + k_2x_2r_2 + \ldots + k_nx_nr_n :$$
$$n \in \mathbb{N}_0,\ \textit{és minden } i\ (0 \le i \le n)\textit{-re}\ \ k_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in X,\ r_i \in R\}.$$

5.14. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Bármely csoport minden konjugáltsági osztálya zárt a konjugálásra.
(b) Abel-csoportban minden konjugáltsági osztály elemszáma azonos.
(c) Bármely csoportban minden konjugáltsági osztály elemszáma azonos.
(d) Ha egy csoportban két elem egymás konjugáltja, akkor a rendjük azonos.
(e) Egy csoport azonos rendű elemei egymás konjugáltjai.
(f) A következő reláció kongruencia a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűn:

$$\{(f,g) \in \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{Q}[x] : f = g = 0 \text{ vagy } f \text{ és } g \text{ fokszáma egyenlő}\}.$$

(g) Egy gyűrű valódi ideálja nem tartalmazza a gyűrű egységelemét.
(h) Kommutatív, egységelemes gyűrű minden faktorgyűrűje is kommutatív és egységelemes.
(i) Zérusosztómentes gyűrű minden faktorgyűrűje is zérusosztómentes.
(j) Véges gyűrű minden I ideáljához vannak olyan I-beli $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ elemek, amelyekre $I = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + \cdots + \langle a_k \rangle$.

6. Homomorfizmusok, izomorfia — alapok

6.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) homomorfizmus, izomorfizmus és izomorfia fogalma algebrákra, alaptulajdonságaik;
(b) csoport- és gyűrűhomomorfizmusok további általános tulajdonságai, példák;
(c) természetes homomorfizmus, homomorf kép, homomorf képre öröklődő tulajdonságok!

6.2. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi $A \to B$ leképezések közül melyik homomorfizmus, szürjektív homomorfizmus, injektív homomorfizmus, illetve izomorfizmus:

(a) $A = (\mathbb{N}; \cdot)$, $B = (\mathbb{Z}; \cdot)$, $x \mapsto x^2$;
(b) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{Z}); \cap, \cup)$, $B = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap, \cup)$, $X \mapsto X \cap \mathbb{N}$;
(c) $A = (\mathcal{P}(\mathbb{Z}); \cap, \cup)$, $B = (\mathcal{P}(\mathbb{Z}); \cap, \cup)$, $X \mapsto X \cup \{-x : x \in X\}$!

6.3. Feladat. Döntse el, hogy a következő hozzárendelések csoporthomomorfizmusok-e, valamint a homomorfizmusokról állapítsa meg, hogy szürjektívek, illetve injektívek-e, és adja meg a képüket:

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $k \mapsto \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$;
(b) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto |z|$;
(c) $\mathbb{Z} \to D_3$, $k \mapsto a^k$;
(d) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto \overline{4k}$;
(e) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{k} \mapsto \overline{k}$;
(f) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{k} \mapsto \overline{2k}$;
(g) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{k} \mapsto \overline{3k}$;
(h) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{n} \mapsto \overline{3^n}$;
(i) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{n} \mapsto \overline{n^3}$;
(j) $\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_{12}^*$, $\overline{n} \mapsto \overline{n^4}$;
(k) $\mathbb{Z}_{10}^* \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{3^n} \mapsto \overline{n}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$;
(l) $\mathbb{Z}_{10}^* \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{3^n} \mapsto \overline{2n}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$;
(m) $\mathbb{Z}_{10}^* \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{3^n} \mapsto \overline{2n}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$;
(n) $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{10}/[\overline{5}]$, $\overline{k} \mapsto \overline{k} + [\overline{5}]$;
(o) $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{10}/[\overline{5}]$, $\overline{k} \mapsto \overline{k} + [\overline{5}]$;
(p) $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{10}/[\overline{5}]$, $\overline{k} \mapsto \overline{2k} + [\overline{5}]$;
(q) $\mathbb{Z}_{12}/[\overline{4}] \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{k} + [\overline{4}] \mapsto \overline{k}$;
(r) $\mathbb{Z}_{12}/[\overline{4}] \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{k} + [\overline{4}] \mapsto \overline{k}$;
(s) $\mathbb{Z}_{12}/[\overline{4}] \to \mathbb{Z}_6^*$, $\overline{k} + [\overline{4}] \mapsto \overline{5^k}$;
(t) $S_n \to (\{-1, 1\}; \cdot)$, $\alpha \mapsto \mathrm{sgn}(\alpha)$;
(u) $S_3 \to \mathbb{Z}_3$, $\alpha \mapsto \alpha$ fixpontjainak száma;
(v) $Q \to Q$, $x \mapsto x^2$;
(w) $Q \to Q$, $x \mapsto x^4$;
(x) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$, $a^k t^l \mapsto \overline{k + l}$;
(y) $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto |A|$;
(z) $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto |A|$!

6.4. Feladat. Döntse el, hogy gyűrűhomomorfizmusok-e az alábbi hozzárendelések, valamint a homomorfizmusokról állapítsa meg, hogy szürjektívek, illetve injektívek-e, és adja meg a képüket:

(a) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + bi \mapsto a$;
(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$;
(c) $\mathbb{Z}_{12}/\langle\overline{4}\rangle \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{k} + \langle\overline{4}\rangle \mapsto \overline{k}$;
(d) $\mathbb{Z}_{12}/\langle\overline{4}\rangle \to \mathbb{Z}_{12}/\langle\overline{4}\rangle$, $\overline{k} + \langle\overline{4}\rangle \mapsto \overline{2k} + \langle\overline{4}\rangle$;
(e) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}/\langle\overline{6}\rangle$, $\overline{k} \mapsto \overline{k} + \langle\overline{6}\rangle$;
(f) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}/\langle\overline{8}\rangle$, $k \mapsto 4k + \langle\overline{8}\rangle$;
(g) $2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}/\langle\overline{8}\rangle$, $k \mapsto 4k + \langle\overline{8}\rangle$;
(h) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(0)$;
(i) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(1)$;
(j) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_1$;
(k) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/\langle x\rangle$, $a \mapsto 2a + \langle x\rangle$;
(l) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a - b$;
(m) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a^2 + b^2$;
(n) $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{2n}$, $\overline{a} \mapsto \overline{2a}$, ahol $0 \le a < n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$;
(o) $\mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z}_n$, $\overline{a} \mapsto \overline{a}$, ha $0 \le a < n$, és $\overline{a} \mapsto \overline{a - n}$, ha $n \le a < 2n$ $(n \in \mathbb{N})$!

6.5. Feladat. Állapítsa meg, hogy létezik-e olyan φ csoporthomomorfizmus, amely teljesíti a megadott feltételt:

(a) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3$, $3\varphi = (1\,2\,3)$;
(b) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3$, $5\varphi = (1\,2\,3)$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4$, $\overline{2}\varphi = \overline{2}$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{3}\varphi = \overline{2}$;
(e) $\varphi\colon D_3 \to \mathbb{Z}_2$, $t\varphi = \overline{1}$;
(f) $\varphi\colon Q \to V$, $i\varphi = (1\,3)(2\,4)$!

6.6. Feladat. Döntse el, hogy létezik-e

(a) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$, (b) $V \to \mathbb{Z}_2$, (c) $D_4 \to S_4$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív csoporthomomorfizmus!

6.7. Feladat. Döntse el, hogy létezik-e

(a) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$, (b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$, (c) $\mathbb{Z}_2^{2\times 2} \to \mathbb{Z}_2$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív gyűrűhomomorfizmus!

6.8. Feladat. Izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(a) $\mathbb{Z}_{10}^*$ és $\mathbb{Z}_4$,
(b) $\mathbb{Z}_{12}/[\overline{3}]$ és $\mathbb{Z}_3$,
(c) $\mathbb{Z}_{12}/[\overline{6}]$ és D_3,
(d) $\mathbb{Z}_{15}^*/[\overline{11}]$ és $\mathbb{Z}_4$,
(e) $\mathbb{Z}_{18}/[\overline{12}]$ és $\mathbb{Z}_{14}^*/[\overline{13}]$,
(f) $\mathbb{Z}_{13}^*/[\overline{12}]$ és S_3,
(g) $Q/[-1]$ és V,
(h) S_3/A_3 és $\mathbb{Z}_2$,
(i) S_4/V és $\mathbb{Z}_6$,
(j) S_4/V és S_3,
(k) $D_4/[a]$ és $\mathbb{Z}_2$,
(l) $D_4/[a^2]$ és $\mathbb{Z}_4$,
(m) $D_4/[a^2]$ és $Q/[-1]$,
(n) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$,
(o) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$?

6.9. Feladat. Izomorfak-e egymással az alábbi gyűrűk:

(a) $\mathbb{R}[x]$ és $\mathbb{C}[x]$,
(b) $\mathbb{Z}_4/\langle\overline{2}\rangle$ és $\mathbb{Z}_2$,
(c) $2\mathbb{Z}/\langle 4\rangle$ és $4\mathbb{Z}/\langle 8\rangle$,
(d) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle$ és $\mathbb{Z}_2$,
(e) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$ és $\mathbb{Z}_4$,
(f) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ és $\mathbb{C}$?

6.10. Feladat. Igazolja, hogy minden integritástartományok közötti (gyűrű)homomorfizmus egységelemes gyűrűhomomorfizmus.

6.11. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Két olyan homomorfizmus szorzata is lehet izomorfizmus, amelyek egyike sem izomorfizmus.
(b) Tetszőleges A algebra minden részalgebrája előáll A-ba menő homomorfizmus képeként.
(c) Bármely A, B algebra és $\varphi\colon A \to B$ homomorfizmus esetén, ha A_1 részalgebrája A-nak, akkor $A_1\varphi$ részalgebrája B-nek.
(d) Tetszőleges három elem által generált algebra bármely homomorf képe generálható legfeljebb három elemmel.
(e) Tetszőleges G, H csoportok esetén létezik $G \to H$ homomorfizmus.
(f) Tetszőleges R, S gyűrűk esetén létezik $R \to S$ homomorfizmus.
(g) Tetszőleges R, S egységelemes gyűrűk esetén létezik $R \to S$ egységelemes gyűrűhomomorfizmus.
(h) Egyetlen nemkommutatív csoportnak sincs kommutatív homomorf képe.
(i) Ha egy G csoport minden homomorf képe kommutatív, akkor G is kommutatív.
(j) Létezik olyan egységelemes gyűrű, amelynek nem minden homomorf képe egységelemes.

7. Homomorfiatétel, egyszerű csoportok és gyűrűk

7.1. Feladat. Foglalja össze röviden az alábbi témákban tanult ismereteket:

(a) homomorfiatétel algebrákra;
(b) homomorfiatétel csoportokra és gyűrűkre;
(c) a homomorfiatétel alkalmazása csoport- és gyűrűhomomorfizmusok keresésére!

7.2. Feladat. Határozza meg a 6.3. Feladatban megadott hozzárendelések közül a csoporthomomorfizmusok magját, az indulási csoport ezen mag szerinti faktorcsoportját, valamint az eredeti homomorfizmus által indukált injektív homomorfizmust a faktorcsoportról az eredeti érkezési csoportba!

7.3. Feladat. Határozza meg a 6.4. Feladatban megadott hozzárendelések közül a gyűrűhomomorfizmusok magját, az indulási gyűrű ezen mag szerinti faktorgyűrűjét, valamint az eredeti homomorfizmus által indukált injektív homomorfizmust a faktorgyűrűről az eredeti érkezési gyűrűbe!

7.4. Feladat. A homomorfiatétel alkalmazásával mutassa meg, hogy a 4.5. Feladat (a), (b), (d), (f), (h), (i) részében szereplő G csoportokban a megadott H részcsoport normálosztót alkot, valamint adja meg, milyen „ismert" csoporttal izomorf a G/H faktorcsoport!

7.5. Feladat. A homomorfiatétel alkalmazásával mutassa meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ normálosztót alkot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)$ csoportban, valamint adja meg, milyen „ismert" csoporttal izomorf a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, n)/\mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ faktorcsoport!

7.6. Feladat. Oldja meg a 6.5., 6.6. és 6.7. Feladatokat a homomorfiatétel alkalmazásával!

7.7. Feladat. Határozza meg az összes

(a) $V \to \mathbb{Z}_4$;
(b) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$;
(c) $\mathbb{Z}_{19}^* \to \mathbb{Z}_{11}^*$;
(d) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$;
(e) $S_3 \to \mathbb{Z}_6$;
(f) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$;
(g) $A_4 \to D_4$;
(h) $S_5 \to A_5$;
(i) $Q \to A_4$

csoporthomomorfizmust!

7.8. Feladat. Határozza meg az összes

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$;
(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$;
(c) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$;
(d) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$;
(e) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}[i]$;
(f) $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$

gyűrűhomomorfizmust!

7.9. Feladat. Adja meg az összes $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ csoporthomomorfizmust tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ esetén!

7.10. Feladat. Határozza meg az összes $S_3 \to S_4$ injektív homomorfizmust!

7.11. Feladat. Adja meg az összes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{p^2}$ gyűrűhomomorfizmust tetszőleges p prímszám esetén!

7.12. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak, és választását minden esetben indokolja!

(a) Egy csoporthomomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha magja csak az egységelemet tartalmazza.
(b) Egy gyűrűhomomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha magja csak a zéruselemet tartalmazza.
(c) Létezik olyan véges csoportról végtelen csoportba menő homomorfizmus, melynek magja triviális.
(d) Ha létezik szürjektív homomorfizmus a G csoportról a $\mathbb{Z}_2$ csoportra, akkor G-nek létezik 2 indexű részcsoportja.
(e) Létezik szürjektív $D_4 \to V$ homomorfizmus.
(f) Egy kommutatív gyűrű pontosan akkor egyszerű, ha test.
(g) Minden $A_5 \to H$ csoporthomomorfizmus injektív.