

## Szorgalmi feladatok

### 5. ALGEBRAI STRUKTÚRÁK

**1. Feladat.** (1 pt.) Mutassuk meg, hogy ha egy monoidban egy elemnek van bal- és jobbinverze, akkor ezek egyenlők, és ennek az elemnek nem lehet több bal- és jobbinverze.

**2. Feladat.** (1 pt.) Adjunk példát olyan félcsoportra, melyben több balegységelem és több jobbzéruselem van.

**3. Feladat.** (1 pt.) Adjunk példát olyan monoidra, melyben van olyan elem, melynek több balinverze van és van olyan elem is, melynek több jobbinverze van.

**4. Feladat.** (1 pt.) Tegyük fel, hogy az  $S$  halmazon definiált szorzásra teljesül, hogy  $S$ -ben van egységelem és  $a(bc) = b(ac)$  minden  $a, b, c \in S$  esetén. Igazoljuk, hogy  $S$  kommutatív félcsoport.

**5. Feladat.** (1 pt.) Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van olyan elem melynek a négyzete önmaga. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

**6. Feladat.** (1 pt.) Tegyük fel, hogy az  $S$  félcsoportban a szorzás rendelkezik a következő tulajdonsággal:  $S$ -ben létezik egy  $e$  balegységelem úgy, hogy minden  $s \in S$  elemhez található olyan  $s' \in S$ , hogy  $s's = e$ . Bizonyítsuk, hogy  $S$  csoportot alkot az említett szorzásra nézve

**7. Feladat.** (1 pt.) Igazoljuk, hogy tetszőleges csoport tetszőleges  $a, b$  elemeire az  $a$  és  $b^{-1}ab$  elemek rendje megegyezik.

**8. Feladat.** (1 pt.) Igazoljuk, hogy tetszőleges csoport tetszőleges véges rendű  $a$  elemére  $o(a^k) = o(a)/\text{lnko}(k, o(a))$ .

**9. Feladat.** (1 pt.) Igazoljuk, hogy ha  $a, b$  két véges rendű elem a  $G$  Abel-csoportban, akkor létezik  $c \in G$ , melyre  $o(c) = \text{lkt}(o(a), o(b))$ .

**10. Feladat.** (1 pt.) Mutassuk meg, hogy véges Abel-csoportokban a legnagyobb elemrend minden elem rendjének a többszöröse.

**11. Feladat.** (1 pt.) Legyen  $A$  egy nemüres halmaz és  $f : A^3 \rightarrow A$  olyan, hogy minden  $x, y \in A$  esetén

$$f(x, y, y) = f(y, y, x) = x,$$

és minden  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in A$  esetén

$$\begin{aligned} f(f(x, x_2, x_3), f(y_1, y_2, y_3), f(z_1, z_2, z_3)) = \\ f(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), f(x_3, y_3, z_3)). \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges, de rögzített  $a \in A$  esetén  $A$  Abel-csoport az  $x + y = f(x, a, y)$  műveletre nézve.

**12. Feladat.** (1 pt.) Létezik-e olyan test a pozitív valós számok halmazán, melynek összeadás művelete a szokásos szorzás?