Magasabbfokú egyenletek 1.

XVI–XVIII. század

1. Előzmények.

Csak pozitív együtthatókat megengedve a következő három típussal kell foglalkozni (azt már az iszlám matematikusok is tudták, hogy hogyan lehet megszabadulni a négyzetes tagtól):

$$x^3 + px = q \tag{1}$$

$$x^3 = px + q \tag{2}$$

$$x^3 + q = px \tag{3}$$

(1) típus: Scipione del Ferro (a Bologna-i Egyetem professzora) oldotta meg először, de vannak olyan nem explicit és bizonytalan nyomok hagyatékában, hogy a másik kettővel is boldogult.
Módszere az $x = u - v$ helyettesítésen alapult Cardano „Ars Magna"-ja (1545) szerint. Ferro 1526-ban halt meg.
1535: egyenletmegoldó verseny Tartaglia (Nicolo Fontana) és Ferro tanítványa Fior között 30 egymásnak kitűzött egyenlettel. Fior csupa (1) típusút adott föl, míg Tartaglia főleg (2) és (3) típusúakat. Tartaglia Fior összes feladatát megoldotta, míg Fior egyet sem, még az (1) típusúakat sem. Ennek ellenére Tartaglia megelégedett az erkölcsi sikerrel, a bankettra (30 személyes vacsorára) és a 30 dukátra nem tartott igényt.
1539-ben Cardano meghívta Tartagliát Milánóba, hogy megismerje módszerét. Ezt Tartaglia vélhetően elárulta, de megeskette Cardanot, hogy a módszerét titokban tartja.

Tartaglia: a (2) típus, mivel az $x^3 - px = q$ alakban is írható, Ferro módszerének kis módosításával, az $x = u + v$ helyettesítéssel megoldható, s ugyanezt kell alkalmazni a (3) esetben is.
Cardano is rájött erre, vagy csak???
Cardano mindkét helyettesítést tárgyalja az „Ars Magna"-ban.
Tartaglia élesen támadta és esküszegéssel vádolta.
Az, hogy mi az igazság??? Megtalálható Ferro hagyatékában?? Erre semmiféle konkrét bizonyíték nincs, a hagyaték mára elveszett.
DE annak, hogy már Ferro ismerte az általános eljárást ellentmond az a tény, hogy tanítványa Fior elvesztette a versenyt, nemhogy a (2) és (3), de még az (1) típusú egyenletekkel sem boldogult.

2. A harmad- és a negyedfokú egyenletek Cardano ARS MAGNA–jából

(A) **Scipione del FERRO** észrevette, hogy az

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

általános harmadfokú egyenlet $y = x + \frac{1}{3}a$ helyettesítéssel

$$x^3 + px + q = 0$$

alakra hozható, így a következő három típussal kell foglalkozni.

$$x^3 + px = q \tag{1}$$
$$x^3 = px + q \tag{2}$$
$$x^3 + q = px \tag{3}$$

Cardano feladata az Ars Magnaból.

„Legyen egy kocka és oldala hatszorosa 20."

Megoldandó tehát az

$$x^3 + 6x = 20 \tag{4}$$

egyenlet, amelyre **FERRO** módszere a következő. Legyen

$$x = u - v, \tag{5}$$

és így

$$\begin{aligned} x^3 + 6x &= (u-v)^3 + 6(u-v) \\ &= (u^3 - v^3) - 3uv(u-v) + 6(u-v) \\ &= 20. \end{aligned}$$

Ebből látszik, hogy az $x = u - v$ megoldás, ha

$$u^3 - v^3 = 20 \tag{6}$$
$$3uv = 6. \tag{7}$$

Ezekből az

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= 20 \\ u^3 v^3 &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik, aminek megoldása már az ókori Mezopotámiában is ismert volt, hiszen ez egy

$$\begin{aligned} r - s &= P \\ rs &= Q \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszer, aminek a megoldása

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q = \left(\frac{r+s}{2}\right)^2$$

$$r = \frac{r+s}{2} + \frac{r-s}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q} + \frac{P}{2}$$
$$s = \frac{r+s}{2} - \frac{r-s}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + Q} - \frac{P}{2},$$

ami alapján
$$u^3 = \sqrt{108} + 10 \quad \text{és} \quad v^3 = \sqrt{108} - 10,$$

vagyis
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} + \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

(B) **CARDANO - TARTAGLIA?** észrevette, hogy ugyanezzel a módszerrel — csak $x = u + v$ helyettesítésel — a másik két típus is megoldható. Pl. (2)-t
$$x^3 - px = q$$

alakba átírva
$$x^3 - px = (u^3 + v^3) + 3uv(u+v) - p(u+v) = q,$$

amiből
$$u^3 + v^3 = q$$
$$u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

és ismét a mezopotámiai módszerrel kapjuk, hogy
$$u^3 = \frac{1}{2}q + w$$
$$v^3 = \frac{1}{2}q - w,$$

ahol $w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 - \left(\frac{1}{3}p\right)^3}$, vagyis
$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w}.$$

(C) Zuanne de Tonini da **COI** feladata Cardano számára.

> „*Osszuk a 10-et három részre úgy, hogy azok folytonos arányban álljanak, s az első kettő szorzata 6 legyen.*”

Vagyis megoldandó az
$$x + y + z = 10$$
$$xz = y^2$$
$$xy = 6$$

egyenletrendszer, amely az
$$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$$

negyedfokú egyenletre vezet.

FERRARI eljárása.
Alapja a geometriai úton igazolt

$$(s+a+b)^2 = (s+a)^2 + 2sb + 2ab + b^2$$

azonosság, amelyet Euklidész Elemek II.4. Tételének általánosításaként kapott. Ezt alkalmazva az

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

egyenlet mindkét oldalához hozzáadott $6x^2$-et:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2+6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Ezután megjegyzi:

> „*Ha $6x^2 + 60x$ négyzet volna, megkapnánk a megoldást. Ezért mindkét oldalhoz elegendő négyzetet és számot adunk, hogy az egyik oldalon egy háromtagú összeg legyen, míg a másik oldalon levő gyöke vele egyenlő.*”

Ezután mindkét oldalhoz $2bx^2$-et, majd egy alkalmas számot ad, amit a következőképp számol ki.

$$(x^2+6+b)^2 = (x+6)^2 + 2bx^2 + 12b + b^2,$$

tehát mindkét oldalhoz adjunk hozzá

$$2bx^2 + 12b + b^2 - \text{et},$$

így egyenletünk

$$(x^2+6+b)^2 = (2b+6)x^2 + 60x + (b^2+12b)$$

alakú lesz. Ezután b-t úgy kell megválasztani, hogy a jobb oldal egy $px+q$ alakú kifejezés négyzete legyen, vagyis

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450.$$

Ez egy (1) típusú harmadfokú egyenletre vezet, aminek megoldása az ismert eljárással megy:

$$b = \sqrt[3]{190+\sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190-\sqrt{33903}} - 5,$$

ami közelítőleg 4.

3. Bombelli megoldása a casus irreducibilisre.

A következő egyenletet oldja meg:

$$x^3 = 15x + 4. \tag{1}$$

Cardano módszerével azt kapja, hogy

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{2}$$

Cardano nyomán a komplex gyököt „mesterkéltnek” nevezte, de megjegyezte, hogy az (1) egyenlet egyáltalán nem lehetetlen, nem megoldhatatlan, hiszen az $x = 4$ egy megoldás.

Ezután megkísérelte, hogy értelmet adjon a kapott eredménynek. Pontosabban azt vizsgálta, hogy mi adódhat abból, ha (2)–ben az első köbgyököt egyenlővé teszi egy $p+\sqrt{-q}$ alakú „számmal”:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}. \tag{3}$$

Mindkét oldalt köbre emelve:

$$2+\sqrt{-121} = (p^3-3pq)+(3p^2-q)\sqrt{-q}.$$

Világos, hogy ez akkor teljesül, ha

$$2 = p^3-3pq \tag{4}$$

és

$$\sqrt{-121} = (3p^2-q)\sqrt{-q}. \tag{5}$$

Ha ezek teljesülnek, akkor az is igaz, hogy

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = p-\sqrt{-q}. \tag{6}$$

Bombelli összeszorozta (3)–at és (6)–ot, ami

$$\sqrt[3]{125} = p^2+q,$$

vagyis

$$q = 5-p^2. \tag{7}$$

Ezt (4)–be helyettesítve p–re egy harmadfokú egyenlet adódik:

$$4p^3-15p = 2. \tag{8}$$

Látható, hogy ennek a $p = 2$ egy megoldása, amit visszahelyettesítve (7)–be a $q = 5-4 = 1$ megoldás jön, tehát

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

és így az eredeti egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4. \end{aligned}$$

A megoldással igen elégedett volt Bombelli, és a következőket írta:

> *Először a dolgok olybá tűntek előttem, hogy bennük több a mesterkéltség, mint az igazság, de addig kutattam, míg megtaláltam a bizonyítást.*

Bombelli egy új terminológiát is alkotott arra, amit mi ma (Euler nyomán) $+i$-vel, ill. $-i$-jelölünk:

più dimeno, ill. *meno di meno,*

majd megadott egy számolási eljárást is:

meno di meno uia men di meno fà meno,

ami modern jelölésekkel:

$$(-i)(-i) = -1.$$

Megjegyzés. Látható, hogy a harmadfokú egyenlet megoldása másodfokú, míg a negyedfokú egyenlet megoldása harmadfokú egyenletre vezethető vissza.

4. Tovább az ötöd- és még magasabbfokú egyenletekre.

4.1. Adrien van ROOMEN egyenlete.

1593-ban a flamand Adrian van ROOMEN a következő egyenlet megoldására hívta ki a matematikusokat és számolómestereket, aminek általánosan ismert alakja:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \ldots - 3795x^3 + 45x = A.$$

Van Roomen kezdetben ezen egyenlet — amely szabályos sokszögek vizsgálatából adódott — speciális eseteinek vizsgálatát javasolta. Például, ha

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

akkor a megoldás

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}.$$

Ez igen jó közelítés, hiszen elvégezve a gyökvonásokat

$$A \approx 1,990369453344395,$$

és

$$x \approx 1,990369453344394$$

adódik, majd az utóbbit behelyettesítve kapjuk, hogy a hiba nagyságrendje mindössze 10^{-15}.

F. Viète, IV. Henrik francia király udvari ügyésze, csillagásza és matematikusa észrevette, hogy a bal odal megkapható $\sin 45x$-ből, és egy alkalmas transzformációval.
E fölismerés alapján Viète 23 megoldást talált $\sin\left(\frac{\varphi}{45} - n8^\circ\right)$ alakban.

Feladat. Írjuk föl a teljes van Roomen egyenletet, és ellenőrizzük az előbbi megoldást. (Ez számítógépes program nélkül reménytelen vállalkozás!) Csak az alkalmazott program leírásával teljes a feladat megoldása.

4.2. Edward WARING.
Azt már Viète is tudta, hogy ha az

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

egyenletnek n gyöke van, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ a_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned}$$

A jobb oldalakon álló kifejezéseket az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanok *elemi szimmetrikus polinomjainak* nevezzük.
Egy 1762-es könyvében E. Waring megmutatta, hogy ezen gyökök minden racionális szimmetrikus függvénye az egyenlet együtthatóinak racionális függvényeként is előállítható. Első lépésként az

$$s_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$$

alakú hatványösszegeket vizsgálta, de később az említett módon általánosította eredményét.

Egy további, 1770-es könyvében már lényegében a mai formában szerepel a szimmetrikus polinomok alaptétele, és annak egy konstruktív bizonyítása.

Igen előremutatók azon vizsgálatai, amelyek azt keresték, hogy milyen alakúak azon egyenletek, amelyek gyökei

$$x = \sqrt[m]{\alpha}_1 + \sqrt[m]{\alpha}_2 + \ldots + \sqrt[m]{\alpha}_n$$

alakban állnak elő. Ez utóbbi miatt ő tekinthető a Galois-elmélet első közvetlen előfutárának.

4.3. Alexandre-Theophile VANDERMONDE 1770-es akadémiai előadássorozatban (Sul la resolution des equations) szerepelt a következő meggondolás.

Ha egy másodfokú egyenlet gyökei x_1, x_2, akkor a megoldás

$$\frac{1}{2}\big(x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\big).$$

alakban írható, ahol a négyzetgyök mindkét értékét figyelembe kell venni. E formula

$$\frac{1}{2}\big((x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\big)$$

alakban is írható, amelyben már a gyökök elemi szimmetrikus polinomjai szerepelnek.

Vandermonde kérdése: írhatók-e az általános n-edfokú egyenlet gyökei is hasonló alakban, azaz

$$\frac{1}{n}[(x_1+\ldots+x_n)+\sqrt[n]{(\varrho_1 x_1+\ldots+\varrho_n x_n)^n} + \sqrt[n]{(\varrho_1^2 x_1+\ldots+\varrho_n^2 x_n)^n} + \ldots + \sqrt[n]{(\varrho_1^{n-1} x_1+\ldots+\varrho_n^{n-1} x_n)^n}],$$

alakban, ahol $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ az n-edik egységgyökök. Ma az $\varrho_1 x_1+\ldots+\varrho_n x_n$ alakú kifejezéseket *Lagrange-rezolvensnek* nevezzük (későbbi elnevezés).

Egyszerű számolással látható, hogy e módszer a harmadfokú egyenleteknél míködik: ha μ, ν jelöli a két harmadik primitív egységgyököt, akkor

$$(x_1+\mu x_2+\nu x_3)^3 = S + 3\mu X + 3\nu Y,$$

ahol

$$S = x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_2$$
$$X = x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$$
$$Y = x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2,$$

amiből

$$S, \quad X+Y \text{ és } XY$$

a gyökök szimmetrikus függvénye, továbbá az X és az Y egy másodfokú egyenlet két gyöke. Az is megmutatható, hogy az $x_1+\mu x_2+\nu x_3$ alakú kifejezések köbgyökvonás alkalmazásával megkaphatók, így már nem nehéz az x_1, x_2, x_3 meghatározása.
A negyedfokú egyenletekre is megy egy kisebb módosítással, de tetszőleges fokszámú egyenletekre már általában nem alkalmazható, bár bizonyos speciális esetekben működött. Például az $x^{11}-1=0$ egyenletet esetén először egy olyan ötödfokú egyenlet megoldására vezette vissza a problémát, amelynek gyökei az

$$\varrho + \varrho^{-1}, \varrho^2 + \varrho^{-2}, \varrho^3 + \varrho^{-3}, \varrho^4 + \varrho^{-4},$$

ahol ϱ egy primitív 11-edik egységgyök. A kapott ötödfokű egyenletet annak „Lagrange-rezolvensével" oldotta meg, amely

$$L = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5$$

alakú most, és α egy primitív ötödik egységgyök, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pedig az ötödfokú egyenlet gyökei. Ahhoz, hogy L^5 racionális módon megadható legyen az x_i gyököket speciális sorrendben kell szerepeltetni. Ez most próbálgatással elérhető, de az általános esetben ilyen sorrend létezését igazolni kellene.

Később kiderült, hogy a kívánalmaknak megfelelő sorrend létezése ekvivalens azzal, hogy a kitevőhöz, mint modulushoz létezik primitív gyök. E fogalmat Euler vezette be, de csak Gaussnak sikerült igazolni először, hogy minden prímhez létezik primitív gyök.

Vandermonde úgy vélte, hogy az $x^n-1=0$ egyenlet megoldása tárgyalható módszerével, azaz minden esetben létezik a kívánalmaknak megfelelő sorrend. Azt is kijelentette, hogy ennek igazolása nem lehet nehéz. Bizonyosnak látszik, hogy nem volt tisztában a nehézségekkel, ugyanis az állítást Gaussnak nem éppen egyszerűen sikerült csak igazolnia.

4.4. Joseph Louis LAGRANGE.

1771-ben a Berlini Akadémia kiadásában megjelent *Réflexions sur la résolution algébrique des equations* c. könyvében szereplő néhány vizsgálatának vázlata.
Kiindulásul az

$$x^3 + nx + p = 0$$

alakú harmadfokú egyenlete vizsgálta. Ennek megoldása jól ismert az Ars Magna alapján, $x = r + s$, ahol r^3, s^3 egy másodfokú egyenlet két gyöke. Lagrange megmutatta, hogy az r, s a következőképp áll elő az egyenlet a, b, c gyökeiből:

$$r = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c)$$
$$s = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c),$$

ahol az α egy harmadik primitív egységgyök.

Ezután az a, b, c gyökök egy tetszőleges

$$y = Aa + Bb + Cc \tag{10}$$

lineáris fügvényét tekintette, amiből a gyökök permutálásával összesen 6 ilyen lineáris kifejezést kaphatunk. Ezek természetesen egy hatodfokú egyenlet gyökei, és megmutatta, hogy amennyiben ez az egyenlet y^3-ben másodfokú, akkor a (10)-beli A, B, C együttható sorozat szükségképp arányos az $1, \alpha, \alpha^2$, vagy $1, \alpha^2, \alpha$ sorozattal, tehát visszakapjuk a korábban már megismert eredményt.

Ezekben a gondolatmenetekben már a Galois-elmélet számos alapvető ötlete fölsejlik.
(1) Határozatlanok, mint például az r, s kifejezhetők a gyökök szimmetrikus függvényeiként.
(2) Vizsgálta a (10) alakú racionális függvények viselkedését permutációkkal szemben.
(3) Az egységgyökök segítségével fölépített kifejezést használ rezolvensként (a Lagrange-rezolvens).

Lagrange módszerét eredményesen alkalmazta a negyedfokú esetre is. Az

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0$$

egyenletről még Ferrari mutatta meg (természetesen még nem ebben az alakban), hogy a megoldás első lépése az

$$y^3 + \frac{1}{2}ny^2 - qy + \frac{1}{8}(4nq - p^2) = 0$$

egyenlet megoldása. Lagrange megmutatta, hogy ennek gyökei megadhatók az eredeti egyenlet a, b, c, d gyökei racionális függvényeként:

$$u = \frac{1}{2}(ab + cd), \quad v = \frac{1}{2}(ac + bd), \quad w = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

Ha permutáljuk az eredeti egyenlet gyökeit, akkor az u csak az u, v, w valamelyikébe mehet át, ami szintén mutatja, hogy egy harmadfokú egyenlet gyökei.

Hozzáfogott az általános eset, az n-edfokú egyenlet vizsgálatához is. Itt azonban csak részleges eredményeket ért el. A legtávolabbra mutatók egyike a következőképp írható le. Tekintsük egy n-edfokú egyenlet gyökei valamely $f(x', x'', \dots, x^{(n)})$ racionális függvényét. Itt a gyököket független változónak tekintette és először használta rájuk a „határozatlan" elnevezést. Ha t és y két ilyen függvénye a gyököknek, akkor azt mondjuk, hogy *hasonlók*, valahányszor az összes olyan permutáció, amellyel szemben az egyik invariáns, a másik is az. Ezután bizonyította a következő tételt (amely a könyv 100. tétele).

> *Ha az összes olyan permutáció, amellyel szemben t invariáns az y is invariáns, akkor az y kifejezhető a t és az egyenlet együtthatói racionális függvényeként.*

E tétel már ténylegesen tekinthető a Galois-elmélet előfutárának.

4.5. Gianfrancesco MALFATI

A harmadfokú egyenletekre alkalmazott módszerekkel kísérelte meg az ötödfokú egyenlet megoldását. Az

$$x^3 + 3ax + b = 0 \tag{1}$$

harmadfokú egyenlet megoldását olyan x keresésével végezte, amelyre fönnáll az

$$x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0 \tag{2}$$

lineáris egyenlet. A benne szereplő köbgyöktől egy Eulertől származó általánosan alkalmazott ötlettel szabadult meg: a $\sqrt[3]{f}$-et $\alpha\sqrt[3]{f}$ és $\alpha^2\sqrt[3]{f}$-fel helyettesítve (2)-ben — α harmadik primitív egységgyök — további két lineáris kifejezéshez jutott, amelyekkel megszorozta (2) bal oldalát. Ebből az

$$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0 \tag{3}$$

egyenletet kapta, amiből az $f = 1$ helyettesítéssel

$$x^3 - 3mnx + (m^3 + n^3) = 0 \tag{4}$$

egyenlet jön, ami pontosan akkor ekvivalens (1)–gyel, ha

$$\begin{aligned} mn &= -a \\ m^3 + n^3 &= b \end{aligned} \tag{5}$$

Ebből egyszerűen kapható m^3, n^3, és azután m és n.

Ugyanezzel a módszerrel akarta megoldani az

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0 \tag{6}$$

egyenletet. Az x gyökre most az

$$x + m\sqrt[5]{f^4} + p\sqrt[5]{f^3} + q\sqrt[5]{f^2} + n\sqrt[5]{f} = 0 \tag{7}$$

lineáris kifejezést föltéve. $\sqrt[5]{f}$ helyébe most rendre

$$\alpha\sqrt[5]{f},\ \alpha^2\sqrt[5]{f},\ \alpha^3\sqrt[5]{f},\ \alpha^4\sqrt[5]{f} - \text{et}$$

helyettesített, ahol α ötödik primitív egységgyök. A kapott négy lineáris kifejezéssel megszorozta (7) baloldalát, x–re rendezte és $f = 1$ helyettesítést alkalmazott. Kapott egy (5)-höz hasonló, de igen bonyolult egyenletrendszert m, n, p, q-ra. Ezt

$$\begin{aligned} mn = y, \quad pq = u \\ 25uy - 5a^2 + 5\frac{c}{3} = z \end{aligned}$$

helyettesítésekkel egyszerűsítette, majd belőle egy z–ben hatodfokú egyenletre jutott iszonyú mennyiségű számolás után.

Ennek általában nem volt legföljebb harmadfokú faktora, de ha mégis volt, akkor a (6) egyenlet gyökjelekkel megoldhatónak bizonyult. A gyökökpedig fölírhatók voltak

$$\begin{aligned} x_0 &= -(m + p + q + n) \\ x_1 &= -(\alpha m + \alpha^2 p + \alpha^3 q + \alpha^4 n) \\ x_2 &= -(\alpha^2 m + \alpha^4 p + \alpha q + \alpha^3 n) \\ x_3 &= -(\alpha^3 m + \alpha p + \alpha^4 q + \alpha^2 n) \\ x_4 &= -(\alpha^4 m + \alpha^3 p + \alpha^2 q + \alpha n) \end{aligned} \tag{8}$$

alakban, azaz m, n, p, q lineáris, míg z negyedfokú polinomja a gyököknek.