10. feladatsor – Részbenrendezések, műveletek

D_n jelöli n pozitív osztóit.

10.1. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

(1) $(\{2, 3, 5, 6, 9\}, |)$
(2) $(\{\emptyset, \{\emptyset, 1\}, \{1\}, \{1, 2\}\}, \subseteq)$
(3) $(\{-1, 0, 2, 3, 4\}, |)$
(4) $(\{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$

10.2. Feladat. Döntsük el, hogy műveletek-e az alábbiak:

(1) a kivonás az egész számok halmazán,
(2) a kivonás a természetes számok halmazán,
(3) az osztás a racionális számok halmazán,
(4) az inverzképzés $\mathbb{R}^{n\times n}$-en,
(5) a szorzás $\mathbb{R}^{m\times n}$-en.

10.3. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidok (1)–(3): idempotensek, illetve kommutatívok-e; (4)–(7): egységelemesek, zéruselemesek-e.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,
(3) $(\mathbb{R}^+, \circ)$, ahol $a \circ b = a^b$,
(4) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = a$,
(5) $(\mathbb{N}, \star)$, ahol $a \star b = ab - a + b$,
(6) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(7) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,

10.4. Feladat. Határozzuk meg a következő grupoidok egységelemét és döntsük el, hogy minden elemnek van-e inverze.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{N}, \mathrm{lkkt})$,
(3) $(P(U), \triangle)$, ahol U tetszőleges halmaz.

10.5. Feladat. Definiáljuk az S_8 halmazon a következő műveletet:

$$\alpha \star \beta = \alpha(1\ 3\ 4)(2\ 5)\beta.$$

Határozzuk meg az $(S_8, \star)$ grupoid egységelemét és döntsük el, hogy van-e minden elemnek inverze.

10.6. Feladat. Definiáljuk az $\mathbb{R}$ halmazon az $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a következőképpen:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ és } a \odot b = a + b - ab.$$

Döntsük el, hogy disztributív, illetve abszorptív-e $\odot$ az $\oplus$-ra.

10.7. Feladat. Tekintsük az $\underline{4}$ halmaz alábbi műveleteit (a táblázat i. sorának j. eleme az $i \circ j$ elem), és döntsük el, hogy az $(\underline{4}, \circ)$ grupoid egységelemes, zéruselemes, kommutatív, illetve asszociatív-e.

(1)

$\circ$	1	2	3	4
1	2	4	1	1
2	1	3	2	4
3	1	2	3	4
4	4	4	4	4

(2)

$\circ$	1	2	3	4
1	2	2	3	1
2	2	2	2	2
3	1	2	4	4
4	3	2	2	4

10.8. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ grupoidot, ahol $\circ$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\phi\psi = \mathrm{id}$, illetve olyat is, melyre $\psi\phi = \mathrm{id}$.