8. feladatsor – Permutációk

A feladatsorban az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli és $[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

8.1. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban.

(1) $\varphi\colon [9] \to [9],\ x \mapsto \overline{5x}$ (a felülvonás a 9-es maradékot jelöli),

(2) $\gamma \in S_8,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\psi\colon [7] \to [7],\ x \mapsto 6 - x$,

(4) $\delta \in S_8,\ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

8.2. Feladat. Adjuk meg a következő S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban.

(1) $\big((1\ 2\ 3)(4\ 2\ 5)^{-1}(6\ 7\ 2\ 1)\big)^{340}$,

(2) $\big((1\ 2\ 3\ 4)(1\ 5\ 7)^{-1}(2\ 4\ 3\ 6)\big)^{111}$,

(3) $\big((1\ 2\ 3\ 4)(4\ 2\ 7)^{-1}(7\ 1\ 5\ 6)\big)^{125}$,

(4) $\big((1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 7)^{-1}(3\ 1\ 2\ 5\ 6)\big)^{333}$,

(5) $\big((4\ 2\ 3)(1\ 5\ 3\ 7)^{-1}(3\ 2\ 7\ 6)\big)^{120}$.

8.3. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(1) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, $\pi \in S_7$,

(2) $(3\ 2\ 1)\pi(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 6)$, $\pi \in S_7$,

(3) $(1\ 2\ 3\ 4)\pi = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, $\pi \in S_8$,

(4) $(4\ 5\ 6)\pi(6\ 5\ 4) = (4\ 5\ 7)(1\ 6\ 2\ 3)$, $\pi \in S_8$,

(5) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_5$,

(6) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_{10}$,

(7) $\pi^4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $\pi \in S_{10}$.

8.4. Feladat. Határozzuk meg S_5-ben, hogy melyik ciklus-típusú permutációból hány van (a ciklus-típus a páronként idegen ciklusokra bontott alakban szereplő ciklusok hosszaiból képzett monoton növekvő sorozat).

8.5. Feladat. Határozzuk meg S_5-ben, S_7-ben, illetve S_9-ben az olyan permutációk számát, melyek páronként idegen ciklusokra bontott alakjában egy 3 és egy 4 hosszú ciklus van.

8.6. Feladat. Határozzuk meg S_6 azon elemeit, amelyek pontosan 1, 2, 3, illetve 4 elemet mozgatnak.

8.7. Feladat. Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

8.8. Feladat. Adjuk meg S_8 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

8.9. Feladat. Hány olyan $\pi \in S_9$ permutáció van, amelyre

(1) $M_\pi = \{2, 3, 5\}$,

(2) $|M_\pi| = 1$,
(3) $|M_\pi| = 2$,
(4) $|M_\pi| = 3$?

8.10. Feladat.

(1) Hány olyan permutációja van S_4-nek, amely az $\binom{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 1\ 3\ 4}$ permutációval idegen?
(2) Van-e olyan permutáció, amely idegen az inverzével?

8.11. Feladat.

(1) Mi az $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ ciklus által mozgatott elemek halmaza?
(2) Igaz-e, hogy ha $\pi, \sigma, \tau \in S_7$ páronként idegen permutációk, akkor $(\pi\sigma\tau)^5 = \pi^5\sigma^5\tau^5$?

8.12. Feladat.

(1) Hány transzpozíció van S_4-ben?
(2) Hány 3-hosszúságú ciklus van S_4-ben?
(3) Hány 4-hosszúságú ciklus van S_4-ben?
(4) Hány 1-hosszúságú ciklus van S_4-ben?
(5) Hány ciklus van S_4-ben?
(6) Hány olyan permutáció van S_4-ben amely nem ciklus?
(7) Hány n-hosszúságú ciklus van S_n-ben?

8.13. Feladat. Hány olyan permutáció van G-ben, amelynek páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakja P alakú:

(1) $G = S_4$, $P = (\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$,
(2) $G = S_5$, $P = (\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$,
(3) $G = S_5$, $P = (\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot)$?

8.14. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

(1) Az identitás páros.
(2) Minden transzpozíció páratlan.
(3) Minden páros hosszú ciklus páros.
(4) Minden páratlan hosszú ciklus páros.
(5) Páros permutációk szorzata páros.
(6) Páratlan permutációk szorzata páros.
(7) Páros és páratlan permutáció szorzata páratlan.
(8) Páratlan permutációk inverze páratlan.

8.15. Feladat.

(1) Hány páratlan permutáció van S_3-ban?
(2) Hány páros permutáció van S_3-ban?
(3) Hány páratlan permutáció van S_1-ben?
(4) Hány páros permutáció van S_1-ben?