

7. feladatsor – Számosságok

7.1. Feladat. (Hilbert szállodája)

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (1) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (2) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
- (3) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?
- (4) A szomszéd utcában lévő konkurencia megszűntével a vendégek immár megszámlálhatóan végtelen sok, egyenként megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító busszal érkeznek. El lehet szállásolni őket?

7.2. Feladat. Adjunk meg bijekciót

- (1) az $\{a \in \mathbb{N} : a \geq 10\}$ és a $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ halmazok között,
- (2) a hárommal nem osztható pozitív egész számok és a páros számok között,
- (3) a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok között,
- (4) a \mathbb{Q} és $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmazok között,
- (5) az \mathbb{R} és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazok között.

7.3. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között:

- (1) \mathbb{R} és \mathbb{R}_0^+ ,
- (2) $(0, 1)$ és $[0, 1]$,
- (3) $(1, 5)$ és \mathbb{R}^+ ,
- (4) $\{x \in \mathbb{R} : 2 \geq x > 1\}$ és \mathbb{R} .

7.4. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$

- (1) szürjektív leképezést, és
- (2) injektív leképezést.

7.5. Feladat. Adjunk meg szürjektív leképezést \mathbb{R} -ről $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -re.

7.6. Feladat. Határozzuk meg a következő elemszámokat (a választ indokolni kell):

- (1) $|\mathbb{N} \times \{1, 2\}|$
- (2) $|\mathbb{Q}^2|$
- (3) $|P(\mathbb{Q})|$
- (4) $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|$

7.7. Feladat. (Számosságaritmetika)

Véges A, B halmazokra előadáson láttuk, hogy $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|A^B| = |A|^{|B|}$, és diszjunkt A, B esetén $|A \cup B| = |A| + |B|$. Hogyan kellene kiterjeszteni a $+$, \cdot és hatvány műveleteket a tanult végtelen számosságokra ahhoz, hogy ezek az állítások érvényben maradjanak?