6. feladatsor – Halmazok és megfeleltetések

A feladatsorban $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt, P, Q, R pedig a $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz következő kétváltozós predikátumait:

P	1	2	3	4
1	h	i	i	h
2	i	i	i	h
3	h	h	h	i
4	h	h	i	i

,

Q	1	2	3	4
1	h	i	i	i
2	i	i	i	h
3	h	h	i	i
4	i	h	h	h

,

R	1	2	3	4
1	h	h	i	i
2	h	i	h	h
3	i	h	h	i
4	i	h	i	i

6.1. Feladat. Adjuk meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával:

(1) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (P(x, a) \to P(x, x))\}$,
(2) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (Q(x, a) \to Q(x, x))\}$,
(3) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (R(x, a) \to R(x, x))\}$,
(4) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (P(a, x) \wedge P(x, x))\}$,
(5) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (Q(a, x) \wedge Q(x, x))\}$,
(6) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (R(a, x) \wedge R(x, x))\}$.

6.2. Feladat. Adjuk meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával:

(1) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(\forall y \in \underline{4})\ \big(Q(a, x) \wedge (Q(x, y) \vee Q(y, x))\big)\}$,
(2) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(\exists y \in \underline{4})\ \big(P(a, x) \to (P(x, y) \wedge P(y, a))\big)\}$,
(3) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (P(a, x) \wedge P(x, b))\}$,
(4) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (Q(a, x) \wedge Q(x, b))\}$,
(5) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (Q(a, x) \to Q(b, x))\}$,
(6) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (R(a, x) \to R(b, x))\}$,
(7) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)\ R(a, a)\}$,
(8) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\forall b \in A)\ R(a, b)\}$.
(9) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)\ P(a, 2)\}$,
(10) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\exists b \in A)\ Q(a, b)\}$.

6.3. Feladat. Adjuk meg az alábbi halmazműveletek eredményeit a kapott halmaz elemeinek felsorolásával. Az univerzum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{1, 4, 5\}$
$\overline{A} \cap (B \triangle C),\ A \setminus (\overline{B} \cup C),\ (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
(2) $A = \{1, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 5, 6\}, C = \{1, 3, 6\}$
$\overline{A} \cap (B \triangle C),\ A \setminus (\overline{B} \cup C),\ (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
(3) $A = \{1, 3, 4, 6\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$
$\overline{A} \cap (B \triangle C),\ A \setminus (\overline{B} \cup C),\ (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
(4) $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{1, 3, 6\}, C = \{1, 2, 3, 5\}$
$\overline{A} \cup (B \triangle C),\ A \setminus (\overline{B} \cap C),\ (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$

6.4. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
(3) $A \triangle (A \triangle B) = B$,
(4) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

6.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra

(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
(2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de általában $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

6.6. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

(1) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x, y) : x = 2, y \text{ tetszőleges}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(4) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$,
(5) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.7. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el és indokoljuk, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(1) $(\forall x)(x, x) \in \alpha$,
(2) $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \alpha) \to ((y, x) \in \alpha)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((x, y) \in \alpha \wedge (y, x) \in \alpha\big) \to x = y$.

6.8. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (2, 5), (1, 1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(5, 2), (4, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.9. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(2, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$
$$\beta = \{(5, 1), (2, 3), (1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

(1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
(2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
(3) Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

6.10. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n-es maradékát $\overline{x}^{(n)}$-nel jelöljük.

(1) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4},\ x \mapsto \overline{x}^{(4)} + 1$ $\qquad$ $\beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \overline{x}^{(6)} + 1$,

(2) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4}, \alpha = \left\{ \begin{array}{c} (1, 2), (2, 4), (3, 3), \\ (4, 1), (5, 2), (6, 3) \end{array} \right\}$, $\quad \beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \text{ páros} \\ x, & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

6.11. Feladat. Határozzuk meg a következő α, β megfeleltetések értelmezési tartományát, értékkészletét, valamint $\alpha\beta$ szorzatát. Melyek leképezések, melyek parciális leképezések?

(1) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $\beta = \{(x, y) : y = 2x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(2) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $\beta = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(3) $\alpha = \{(x, y) : |x - y| < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\beta = \{(x, y) : x \leq y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
(4) $\alpha = \{(x, y) : 5x = y + 1\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\beta = \{(x, y) : x = \lfloor y \rfloor\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6.12. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e. A bijektíveknek adjuk meg az inverzét, a csak injektíveknek adjuk meg a parciális inverzét.

(1) $\varphi_1 = \{(1,4),(2,3),(5,3),(6,1),(3,3),(4,4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(2) $\varphi_2 = \{(1,4),(4,2),(3,1),(2,2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(3) $\varphi_3 = \{(1,5),(2,3),(5,4),(3,1),(4,2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$,
(4) $\varphi_4 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x+1$,
(5) $\varphi_5 \colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,
(6) $\varphi_6 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$,
(7) $\varphi_7 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2+1$,
(8) $\varphi_8 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^5 - \sin x$,
(9) $\varphi_9 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x + 1$,
(10) $\varphi_{10} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 6n+1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 6n-1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$