

4. feladatsor – Logika I.

4.1. Feladat. Adjuk meg az alábbi formulák összes részformuláját és az igazságtáblázatát:

- (1) $(A \rightarrow (B \vee (\neg C))) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge B)$,
- (2) $(B \wedge (\neg A)) \rightarrow (C \leftrightarrow (A \vee (\neg B)))$,
- (3) $(A \vee C) \rightarrow ((\neg B) \wedge (C \leftrightarrow A))$,
- (4) $(A \vee (B \leftrightarrow (\neg C))) \rightarrow (A \wedge (\neg C))$,
- (5) $(C \wedge (A \rightarrow (\neg B))) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$,
- (6) $((A \vee (\neg C)) \leftrightarrow B) \wedge (C \rightarrow (\neg A))$.

4.2. Feladat. Tagadást nem tartalmazó ítéletváltozók bevezetésével formalizáljuk az alábbi ítéleteket értelemszerűen.

- (1) Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.
- (2) Pontosán akkor ejtünk le egy szelet kenyeret, ha vagy az egyik fele lekváros, vagy egyik fele sem lekváros, de ügyetlenek vagyunk.
- (3) Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.
- (4) Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.
- (5) Ha valami kutya, akkor állat, de ha valami állat, akkor az vagy kutya, vagy nem kutya.
- (6) Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már most sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.

4.3. Feladat. Az alábbi formulák közül melyek tautológiák?

- (1) $A \rightarrow (A \wedge B)$
- (2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$
- (3) $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$
- (4) $(A \vee B) \vee ((\neg A) \vee (\neg B))$
- (5) $A \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$

4.4. Feladat. Ekvivalensek az alábbi formulák?

- (1) $(A \wedge B) \rightarrow C$ és $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- (2) A és $(A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B))$
- (3) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A)$ és $A \wedge (\neg B)$
- (4) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (B \vee C))$ és $(A \wedge B) \rightarrow A$

4.5. Feladat. Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

- (1) $A \rightarrow (\neg A \vee B)$,
- (2) $A \vee (\neg A \rightarrow B)$,
- (3) $(A \wedge \neg C) \leftrightarrow (\neg B \vee C)$,
- (4) $((A \vee B) \rightarrow C) \wedge (\neg(A \wedge B) \wedge C)$,
- (5) $\neg((A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg(A \wedge C)))$.

4.6. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az \wedge és \neg műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

$$(1) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & i \\ i & h & i \\ h & i & i \\ h & h & i \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & i \\ i & h & h \\ h & i & h \\ h & h & i \end{array}$$

4.7. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az \rightarrow és \leftrightarrow műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

$$(1) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & i \\ i & h & i \\ h & i & i \\ h & h & h \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & h \\ i & h & i \\ h & i & i \\ h & h & h \end{array}$$

4.8. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az \rightarrow és \neg műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

$$(1) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & i \\ i & h & i \\ h & i & i \\ h & h & i \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c|c|c} A & B & ? \\ \hline i & i & h \\ i & h & i \\ h & h & i \\ h & i & h \end{array}$$

4.9. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$$H(x): \text{„}x \text{ hallgató”}, \quad V(x): \text{„}x \text{ felkészült a vizsgára”}, \\ C(x, y): \text{„}x \text{ csoporttársa } y\text{-nak”}, \quad p: \text{„Péter”}.$$

- (1) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
- (2) Péter hallgató.
- (3) Hallgatók csoporttársai is hallgatók.
- (4) Péter összes csoporttársa felkészült a vizsgára.
- (5) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.
- (6) Van olyan hallgató, akinek semelyik csoporttársa sem készült fel a vizsgára.

4.10. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$$S(x): x \text{ szomorú} \quad e: \text{én} \\ E(x, y): x \text{ az } y \text{ ellensége} \quad B(x, y): x \text{ az } y \text{ barátja}.$$

- (1) Van, aki szomorú.
- (2) Szomorú vagyok.
- (3) Mindenkinek vannak ellenségei.
- (4) Akinek nincs barátja, az szomorú.
- (5) Az ellenségem ellensége a barátom.
- (6) Van olyan ember, akinek minden barátja az ellenségem.