2. feladatsor – Diofantoszi egyenlet, prímszámok

2.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket euklideszi algoritmus segítségével.

(1) $72x - 60y = 36$; (2) $78x + 30y = 12$; (3) $53x - 28y = 7$
(4) $72x - 11y = 33$; (5) $21x - 15y = 12$; (6) $18x + 21y = 9$.

2.2. Feladat.

(1) Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 225 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)
(2) Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak-e még idén ebben a kikötőben?
(3) Egy út egyik oldalán 12 méterenként fák sorakoznak, a másik oldalon pedig villanyoszlopok, 75 méterenként. Ahol most állok, ott éppen szemben van egymással egy fa és egy villanyoszlop. Mennyit kell sétálnom a következő ilyen helyig?
(4) Csongor felesége, Gyopár egy 77 gyönggyel díszített bőrtokot varrt ura születésnapjára. A sikeren felbuzdulva Csongor hagyományőrző dorombegyüttesének minden tagját meglepte egy ugyanilyen tokkal. A tokokat a tagoknak a táltosünnep 50 személyes központi jurtájában adta át nyilvánosan. A kínai boltban százas csomagokban vásárolt gyöngyökből 7 megmaradt, melyekkel Gyopár a hétköznapi pártáját ékesítette. Hányan dorombolnak Csongor zenekarában?

2.3. Feladat. Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk, ahol a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

2.4. Feladat. Adjunk meg végtelen sok $a, b \in \mathbb{N}$ számpárt úgy, hogy a rajtuk végrehajtott euklideszi algoritmus 3 lépésből álljon (azaz a 2. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot), és $\text{lnko}(a, b) = 1$ teljesüljön.

2.5. Feladat. Keressük meg azokat a legkisebb a és b ($a > b$) természetes számokat, melyekhez tartozó euklideszi algoritmus 6 lépésből áll (azaz az 5. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot). Általánosítsuk n lépésre.

2.6. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3) \text{ és } 10 \leq x \leq 30\}$;
(b) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10) \text{ és } 15 \leq y \leq 35)\}$;
(c) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13) \text{ és } 10 \leq x \leq 30\}$;
(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7) \text{ és } 20 \leq y \leq 40)\}$.

2.7. Feladat. Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

2.8. Feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

2.9. Feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került” Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

2.10. Feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

2.11. Feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használjunk fel.

2.12. Feladat. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a, $a+4$ és $a+14$ számok prímek legyenek.

2.13. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a, $a+10$ és $a+14$ is prímszám.

2.14. Feladat. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2+1$ is prím.

2.15. Feladat. Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul?

2.16. Feladat. Teljesül-e, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel?

2.17. Feladat. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

2.18. Feladat. Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

2.19. Feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?