1. feladatsor – Oszthatóság

1.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy alábbi oszthatóságok tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek.

(1) $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$;
(2) $6 \mid 17^n - 11^n$;
(3) $9 \mid 7^n + 3n - 1$;
(4) $1 + 2 + 3 \mid 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$;
(5) $30 \mid n^5 - n$.

1.2. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg a legkisebb közös többszörösüket.

(1) $a = -1183$, $b = 1573$.
(2) $a = 368$, $b = 161$;
(3) $a = 539$, $b = 1001$.
(4) $a = 377$, $b = 233$;
(5) $a = -1253$, $b = -3241$.

1.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^k - 1$ osztható 9-cel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek összege osztható 9-cel, azaz

$$9 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 9 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

1.4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^{2k+1} + 1$ és $10^{2k} - 1$ osztható 11-gyel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel, azaz

$$11 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

1.5. Feladat. Palindrom számnak az olyan számokat nevezzük, amelyeknek tízes számrendszerbeli felírása oda-vissza ugyanaz. Mutassuk meg, hogy minden páros hosszúságú palindrom szám osztható tizeneggyel.

1.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely a, b egész számokra teljesül, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$. Döntsük el ennek a szabálynak a segítségével, hogy osztható -e héttel a 334989655 szám!

1.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a + 9b$ osztható 17-tel, akkor $33a + 89b$ is osztható 17-tel.

1.8. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a és b természetes számot, amelyre

(1) $\mathrm{lnko}(a, b) = 22$ és $\mathrm{lkkt}(a, b) = 264$;
(2) $a + b = 98$ és $\mathrm{lkkt}(a, b) = 720$.

1.9. Feladat. Fejezzük ki az 1.2 Feladatban kapott legnagyobb közös osztókat a és b lineáris kombinációjaként.

1.10. Feladat. Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

1.11. Feladat. Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám 7-tel osztható?

1.12. Feladat. Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul?

1.13. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amely

(a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul;
(b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul;
(c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul;
(d) 9-cel osztva 3-at ad maradékul?

1.14. Feladat. Mutassuk meg, hogy a következő számok összetett számok.

(a) $10^6 - 5^7$;
(b) $10^{100} - 7$;
(c) $4^{20} - 1$;
(d) 1000027;
(e) $1000\ldots001$ (2012 darab 0);
(f) $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$.