

5. feladatsor – Műveletek.

5.1. Feladat. Művelet-e (zárt-e az adott halmaz az adott műveletre):

- (1) a szokásos összeadás, illetve szorzás a $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmazon;
- (2) a szokásos összeadás, illetve szorzás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
- (3) a metszés, illetve egyesítés az $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ halmazon;
- (4) az osztás a \mathbb{Q} halmazon?

5.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelet tábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (1) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$;
- (2) $(P(\{1, 2\}); \setminus)$;

5.3. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelet tábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (1) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
- (2) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$, ahol \mathbf{i} az igaz, \mathbf{h} a hamis logikai érték.

5.4. Feladat. Az alábbi művelet táblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, cancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

\circ	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	d	d	a	a

5.5. Feladat. Az alábbi művelet táblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, cancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

5.6. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoporthot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (1) $(\mathbb{Q}; \circ)$, ahol $q \circ r = q$;
- (2) $(\mathbb{R}; \square)$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;

5.7. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoportot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (1) $(\mathbb{N}; *)$, ahol $m * n = mn - m + n$;
- (2) $(\mathbb{R}; \Delta)$, ahol $x \Delta y = xy - 2(x + y) + 6$;

5.8. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoportot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (1) $(\mathbb{R}; \sqcup)$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
- (2) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}; \oplus)$, ahol $x \oplus y = |x - y|$.

5.9. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

- (1) $(\mathbb{N}; +)$;
- (2) $(\mathbb{Z}; \cdot)$;
- (3) $(P(\mathbb{N}); \cap)$.

5.10. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

- (1) $(\mathbb{N}_0; +)$;
- (2) $(\mathbb{Q}; \cdot)$;
- (3) $(P(\mathbb{N}); \Delta)$.

5.11. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. (Jelölje $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a 2×2 -es valós mátrixok halmazát.)

- (1) $(\mathbb{Z}; +)$;
- (2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
- (3) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$.

5.12. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. (Jelölje $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a 2×2 -es valós mátrixok halmazát.)

- (1) $(\mathbb{Q}; +)$;
- (2) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$;
- (3) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$.

5.13. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebrák közül? (Jelölje \mathbb{Z}_{12} a moduló 12 maradékosztályok halmazát.)

- (1) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$;
- (2) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$;
- (3) $(\mathbb{Z}_{12}; +; \cdot)$;

5.14. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebrák közül? (Jelölje $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a 2×2 -es valós mátrixok halmazát.)

- (1) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$;
- (2) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$;
- (3) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$.

5.15. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebraik közül? (Jelölje $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ a 2×2 -es egész számokat tartalmazó mátrixok halmazát.)

- (1) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$;
- (2) $(P(\mathbb{N}); \Delta; \cap)$;
- (3) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$.

5.16. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére?

- (1) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
- (2) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.

5.17. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x elemére?

- (1) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
- (2) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

5.18. Feladat. Keressünk olyan 2-elemű groupoidot, amely nem monoid. Keressünk olyan csoportot, amely nem Abel-csoport.

5.19. Feladat. Keressünk olyan 3-elemű monoidot, amely nem félcsoport. Keressünk olyan félcsoportot, amely nem csoport.

5.20. Feladat. Keressünk véges elemszámú nem kommutatív gyűrűt. Keressük véges elemszámú nem egységelemes gyűrűt.