3. feladatsor – Leképezések.

3.1. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés?

(1) $\alpha = \{(x,y)\colon y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(2) $\beta = \{(x,y)\colon x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(3) $\alpha\beta$, ahol α és β a fent megadott megfeleltetés.

3.2. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés?

(1) $\gamma = \{(x,y)\colon x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(2) $\delta = \{(x,y)\colon x = y^2 + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(3) $\gamma^{-1}\gamma$, ahol γ a fent megadot megfeleltetés.

3.3. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés?

(1) $\alpha = \{(x,y)\colon |x| = |y|\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(2) $\beta = \{(x,y)\colon x \le y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(3) $\gamma = \{(x,y)\colon x + |y| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

3.4. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés?

(1) $\alpha = \{(x,y)\colon \sin x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(2) $\beta = \{(x,y)\colon x = \sin y\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
(3) $\beta\alpha$, ahol α és β a fent megadott megfeleltetés.

3.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha(x) = x^2, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \beta(x) = 3x + 1$,
(2) $\alpha\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x-1)$.

3.6. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha(x) = 2^x - 1, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \beta(x) = 3^{x-1}$,
(2) $\alpha\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{2}, \quad \beta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x+1)$.

3.7. Feladat. Tekintsük a $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0, \\ x^2, & \text{ha } x \le 0, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 1, \\ 1 - x, & \text{ha } x \le 1. \end{cases}$$

Határozza meg a $\varphi\psi$ leképezést.

3.8. Feladat. Tekintsük a $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0, \\ x^2, & \text{ha } x \le 0, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 1, \\ 1 - x, & \text{ha } x \le 1. \end{cases}$$

Határozza meg a $\psi\varphi$ leképezést.

3.9. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha(x) = x^2$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ \beta(x) = x^2$,

(3) $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \varepsilon(x) = \frac{4}{x}$.

3.10. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

(1) $\gamma = \{(x, y)\colon x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$,
(2) $\delta = \{(x, y)\colon \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$,
(3) $\delta' = \{(x, y)\colon x \text{ az } y\text{-nak origóra való tükrözése}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

3.11. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n\zeta = |n-3| + 1$,
(2) $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma,
(3) $\theta\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$.

3.12. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak összege,
(2) $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

3.13. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ prímosztóinak száma,
(2) $\beta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto |n|$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

3.14. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \mapsto A \cup \{7\}$,
(2) $\beta\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$,
(3) $\gamma\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ (A, B) \mapsto \mathbb{A} \triangle B$,

3.15. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e.

(1) $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x-1, 1)$,
(2) $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

3.16. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(1) nem szürjektív és nem injektív,
(2) szürjektív, de nem bijektív,
(3) injektív, de nem bijektív,
(4) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat.

3.17. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan φ, ψ leképezésekre, hogy

(1) a $\varphi\psi$ szorzat injektív, de φ vagy ψ közül valamelyik nem injektív,
(2) a $\varphi\psi$ szorzat szürjektív, de φ vagy ψ közül valamelyik nem szürjektív.

3.18. Feladat. Adjunk meg bijekciót a valós számok következő részhalmazai között.

(1) $(1, 6)$ és $(4, 7)$,
(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$.

3.19. Feladat. Adjunk meg bijekciót a valós számok következő részhalmazai között.

(1) $\mathbb{R}^+$ és $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,
(2) $(0, 1)$ és $\mathbb{R}$.

3.20. Feladat. Adjunk meg bijekciót a valós számok következő részhalmazai között.

(1) $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$,
(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,