Rang, altér

(előadásvázlat, 2016. szeptember 14.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni:

(1) A mátrixalgebrával kapcsolatban: számtest feletti mátrixok fogalma, mátrixok képlettel való megadása, műveletek mátrixokkal és azok elemi tulajdonságai, trianguláris mátrixok.

(2) A determinánsokkal kapcsolatban: a determináns fogalma, kifejtési tételek, a determinánsok elemi tulajdonságai, a dualitás elve, a determinánsok szorzástétele, trianguláris mátrixok determinánsa, mátrix inverzének kiszámítása determinánssal, elfajuló mátrix.

(3) A lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban: a lineáris egyenletrendszer fogalma, egyenletrendszerek mátrixos alakja, bővített mátrix, lépcsős alakú egyenletrendszerek, kötött és szabad változók, elemi sorátalakítások, Gauss-elimináció, Cramer-szabály, mátrixok determinánsának és inverzének kiszámolása elemi sorátalakításokkal.

(4) Az absztrakt vektorterekkel kapcsolatban: számtest feletti vektortér fogalma, a fontos példák ismerete (T^n, $T^{\mathbb{N}}$, $T^{m\times n}$, $T[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{Q}$ felett) nullvektor, műveletek vektorokkal és azok elemi tulajdonságai, vektorterek izomorfizmusa, altér fogalma, triviális alterek, homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere, lineáris kombináció, triviális lineáris kombináció, feszített (generált) altér, alterek összege és metszete, az alterek hálója,

(5) Vektorrendszerekkel kapcsolatban: a vektorrendszer fogalma, lineárisan független és függő vektorrendszerek, maximális lineárisan független vektorrendszer, generátorrendszer, minimális generátorrendszer, végesdimenziós vektortér, bázis, standard bázis, vektor koordinátái, kicserélési tétel, dimenzió fogalma, azonos dimenziós vektorterek izomorfak.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.

1. Tétel. *Legyen T test, és $A = (a_{i,j}) \in T^{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor*

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,1\sigma}\cdot a_{2,2\sigma}\cdots a_{n,n\sigma}.$$

2. Példa. $n = 2$ esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\mathrm{id})\cdot a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}((1\ 2))\cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ esetén:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(\mathrm{id})\cdot a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 2))\cdot a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 3))\cdot a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad + \operatorname{sgn}((2\ 3))\cdot a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}((1\ 2\ 3))\cdot a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}((1\ 3\ 2))\cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

ami éppen a Sarrus-szabály.

3. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak tetszőleges T testre?

(1) $|A| \geq 0$ tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra.
(2) Tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra $|A| \in T$.
(3) Ha $A \in T^{n\times k}$ és $B \in T^{k\times m}$, akkor $AB \in \mathbb{C}^{n\times m}$.
(4) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $B \in T^{n\times n}$, akkor $|AB| = |A| \cdot |B|$.
(5) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $B \in T^{n\times n}$, akkor $|A + B| = |A| + |B|$.
(6) Ha $A \in T^{n\times n}$ és $\lambda \in T$, akkor $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
(7) Ha az $A \in T^{n\times n}$ mátrix valamely oszlopában csupa nulla elem van, akkor $|A| = 0$.
(8) Ha $A \in T^{n\times n}$ trianguláris, akkor $|A|$ a főátlón elhelyezkedő elemek szorzata.
(9) Az $A \in T^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $|A| \neq 0$.

4. Definíció. A következő speciális alakú $n\times n$-es determinánst Vandermonde-determinánsnak nevezzük:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Értéke az alábbi képlet szerint számolható:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j<i} (x_i - x_j).$$

5. Definíció. A T test feletti V vektortér $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszere lineárisan független, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, azaz csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\underline{0}$-t. Különben a vektorrendszer lineárisan függő.

6. Definíció. A T test feletti V vektortér $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független részrendszereinek maximális elemszámát a vektorrendszer rangjának nevezzük, és $r(v_1, \dots, v_k)$-val jelöljük.

7. Definíció. Az $A \in T^{m\times n}$-es mátrix sorrangja az A sorai által alkotott vektorrendszer rangja, oszloprangja az A oszlopai által alkotott vektorrendszer rangja.

8. Definíció. Legyen $A \in T^{m\times n}$ tetszőleges T test feletti mátrix és $r \leq m, n$ egészek. Az A mátrix r-edrendű aldeterminánsainak az A mátrix tetszőleges r sorát és r oszlopát kijelölve, majd a kijelölt sorok és oszlopok találkozásában lévő elemekből alkotott $r \times r$-es mátrixok determinánsait nevezzük. Az A mátrix determinánsrangja a nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánsainak a maximális rendje.

9. Példa. Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsrangját. A rang maximum 4 lehet, mert ha az utolsó, csupa nulla oszlop benne van egy aldeterminánsban, akkor annak értéke 0. Viszont azokat a sorokat kiválasztva, amelyek 1-gyel kezdődnek az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

aldeterminánst kapjuk, amely éppen egy Vandermonde-determináns, ezért értéke

$$(3-2)(-1-2)(5-2)(-1-3)(5-3)(5-(-1)) \neq 0,$$

tehát az A mátrix determinánsrangja 4.

10. Tétel (Rangszámtétel). *Tetszőleges mátrix sor-, oszlop- és determinánsrangjai megegyeznek.*

11. Definíció. A rangszámtétel szerint tetszőleges A mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. Ezt a számot nevezzük az A mátrix rangjának, és $r(A)$-val jelöljük.

12. Következmény. *Tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixra a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $|A| \neq 0$,
(2) *A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független,*
(3) *A sorvektorainak rendszere lineárisan független,*
(4) $r(A) = n$.

13. Tétel (Kronecker-Capelli-tétel). *Tetszőleges T test, $A \in T^{m\times n}$ és $b \in T^m$ esetén az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(A) = r(A|b)$.*

14. Definíció. A $v_1, \dots, v_k$ vektorok által generált altér elemei a $v_1, \dots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorok. Jele: $[v_1, \dots, v_k]$.

15. Definíció. Egy T test feletti V vektortérben a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer az U altér bázisa, ha a vektorrendszer lineárisan független és generátorrendszer ($U = [v_1, \dots, v_k]$). A bázis elemszáma a dimenzió. Jele: $\dim(U)$.

16. Tétel. *Egy T test feletti V vektortér bármely $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszere esetén*

$$r(v_1, \dots, v_k) = \dim[v_1, \dots, v_k].$$

17. Definíció. Két vektorrendszert ekvivalensnek nevezzük, ha ugyanazt az alteret generálják.

18. Definíció. A vektorrendszerek elemi átalakításai a következők:

(1) tetszőleges v_i vektor nemnulla $\lambda \in T$ skalárral való szorzása

$$v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k \quad \sim \quad v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$$

(2) tetszőleges v_i vektor tetszőleges $\lambda \in T$ skalárszorosának egy másik v_j ($j \neq i$) vektorhoz való hozzáadása

$$v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k \quad \sim \quad v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda v_i + v_j, v_{j+1}, \dots, v_k$$

(3) nulla vektor elhagyása (hozzávétele)

$$v_1, \dots, v_{i-1}, \underline{0}, v_{i+1}, \dots, v_k \quad \sim \quad v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k.$$

19. Tétel. *Két vektorrendszer akkor és csak akkor ekvivalens, ha elemi átalakítások sorozatával egymásba alakítható. Tehát tetszőleges generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával bázissá alakítható.*

20. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak véges dimenziós vektorterekben?

(1) Ekvivalens vektorrendszerek elemszáma megegyezik.
(2) Elemi átalakítások megfordítottja is elemi átalakítás.
(3) Bármely két lineárisan független vektorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba alakíthatók.
(4) Bármely két generátorrendszer elemi átalakítások sorozatával egymásba vihetők.
(5) Két azonos vektor közül az egyiknek az elhagyása elemi átalakítások sorozatával megvalósítható.

21. Példa. Az $\mathbb{R}^4$ vektortérben megadjuk az $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$ és $(-3, 3, 2, 1)$ vektorok által generált U altér bázisát. Ehhez a generáló vektorokat egy mátrix soraiba beírjuk, majd a mátrixon sorokon végzett elemi átalakításokkal elvégezzük a Gauss-eliminációt. Az elemi átalakítások nem változtatják meg a generált alteret, továbbá könnyen látható, hogy a Gauss-elimináció során kapott nemzéró vektorok lineárisan függetlenek. Így az eljárás végén egy bázist kapunk.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz U kétdimenziós és az $(1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $(0, 1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ vektorrendszer bázis.

22. Megjegyzés. Az előző példában szereplő $(1, 1, 2, -1)$, $(-2, 1, 0, 1)$, $(-3, 3, 2, 1)$ vektorrendszer rangját is meghatároztuk, ugyanis a 16. tétel szerint:

$$r((1, 1, 2, -1), (-2, 1, 0, 1), (-3, 3, 2, 1)) = \dim(U) = 2.$$

Mivel a vektorrendszer 3 elemű, így a rang definíciója alapján azt is megkaptuk, hogy a vektorrendszer lineárisan függő.

23. Példa. Az 21. példában szereplő U alteret megadjuk egyenletek segítségével is. Tudjuk, hogy az altér minden eleme a báziselemek lineáris kombinációjaként előáll, azaz

$$\begin{aligned} U &= \left\{ x \cdot (1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) + y \cdot (0, 1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y) : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2,\ x_4 = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 = 0,\ x_4 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Az utolsó halmazt nevezzük az altér egyenletekkel való megadásának.

24. Példa. Az előző példában láttuk, hogy hogyan lehet egy generáló vektorokkal megadott alteret egyenletekkel leírni. Most ennek a fordítottját fogjuk elvégezni. Tekintsük a $\mathbb{R}^4$ vektortérben a

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : 22x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,\ 8x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 0 \}$$

alteret. Az egyenletek közül valamelyiket kiválasztva (mondjuk az elsőt) kifejezzük az egyik változót (mondjuk az x_2-t) a többi segítségével, azaz

$$x_2 = 22x_1 + 3x_3.$$

Azt kaptuk, hogy x_2 kötött változó (azaz a többi ismeretében kiszámítható). Ezt a változót visszahelyettesítve a többi egyenltebe kapjuk, hogy

$$8x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ 4x_1 + 2(22x_1 + 3x_3) + 6x_4 = 0,$$

azaz

$$8x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ 48x_1 + 6x_3 + 6x_4 = 0.$$

Megint kiválasztunk egy egyenletet (mondjuk az elsőt), és kifejezünk egy változót (mondjuk x_3-at) és kapjuk, hogy

$$x_3 = -8x_1 - x_4$$

szintén kötött változó. Ezt visszahelyettesítve a maradék egyenletbe

$$48x_1 + 6(-8x_1 - x_4) + 6x_4 = 0,$$

amit egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $0 = 0$, ami mindig teljesül. Az egyenletek elfogytak, az x_2 és x_3 változók kötöttek, a többi változó (azaz az x_1 és x_4) szabadon választható. A szabadon választható változók száma adja a dimenziót, azaz $\dim(V) = 2$. A homogén lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk Gauss-eliminációval is. A szabadon választható változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabadon választható változó kapjon 1 értéket. Így

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1, \qquad x_4 = 0, \qquad x_3 = -8 \cdot 1 - 0 = -8, \qquad x_2 = 22 \cdot 1 + 3 \cdot (-8) = -2,\\
&x_1 = 0, \qquad x_4 = 1, \qquad x_3 = -8 \cdot 0 - 1 = -1, \qquad x_2 = 22 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -3.
\end{aligned}$$

A kapott vektorok $(1, -2, -8, 0)$ és $(0, -3, -1, 1)$ alkotják az altér bázisát.

25. Megjegyzés. Ha homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott altér esetén keressük a generátorrendszert, akkor az egyenletrendszer megoldására használható a Gauss-elimináció is.

26. Tétel (Alterek dimenziótétele). *Ha U és V véges dimenziós altér valamely vektortérben, akkor $U \cap V$ és $U + V$ is véges dimenziós, és*

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V).$$

27. Példa. A 21. és 24. feladatokban megadott U és V alterekre kiszámoljuk $U \cap V$ dimenzióját és megadjuk egyenletek segítségével. Mind az U, mind a V altereket már megadtuk egyenletek segítségével. Az $U \cap V$ altérben azon vektorok vannak amelyek mind két egyenletrendszerben előforduló egyenletet teljesítik, azaz

$$\begin{aligned}
U \cap V = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) : \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 = 0,\ x_4 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0,\\
22x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,\ 8x_1 + x_3 + x_4 = 0, 4x_1 + 2x_2 + 6x_4 = 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Itt a 24. példához hasonlóan az egyenletek visszafejtésével meghatározzuk a kötött és szabad változókat. Már tudjuk, hogy

$$x_2 = 22x_1 + 3x_3 \text{ és } x_3 = -8x_1 - x_4$$

kötött változók, így ezt már nem kell még egyszer kiszámolnunk. Ezt visszahelyettesítve az első két egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}(22x_1 + 3(-8x_1 - x_4)) - (-8x_1 - x_4)\\
&= (\frac{2}{3} + \frac{88}{3} - 32 + 8)x_1 + (-4 + 1)x_4 = 6x_1 - 3x_4 = 0,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
x_4 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= x_4 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}(22x_1 + 3(-8x_1 - x_4))\\
&= (\frac{2}{3} + \frac{22}{3} - 8)x_1 + (1 - 1)x_4 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_4 = 0.
\end{aligned}$$

A második egyenletnél azt kaptuk, hogy $0 = 0$ ami mindig teljesül. Az elsőből pedig azt kapjuk hogy $x_4 = 2x_1$. Tehat az x_2, x_3, x_4 változók kötöttek, az x_1 szabadon választható, az $U \cap V$ altér egy dimenziós, melynek bázisa az

$$x_1 = 1, x_4 = 2, x_3 = -8 \cdot 1 - 2 = -10, x_2 = 22 \cdot 1 + 3 \cdot (-10) = -8,$$

számolás alapján $(1, -8 - 10, 2)$.

28. Példa. A 21. és 24. feladatokban megadott U és V alterekre megadjuk $U + V$ egy generátorrendszerét és dimenzióját. Mind a két altérnek tudjuk a generátorrendszerét, így az $U + V$ alteret ezen generátor vektorok összessége fogja generálni, azaz

$$U + V = [(1, 1, 2, -1),\ (-2, 1, 0, 1),\ (-3, 3, 2, 1),\ (1, -2, -8, 0),\ (0, -3, -1, 1)].$$

Ezt a 21. példához hasonlóan Gauss-elimináció segítségével bázissá alakíthatjuk, de ezt most itt nem tesszük meg. A dimenziót viszont az alterek dimenziótételéből egyből megkaphatjuk:

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$