8. feladatsor – Euklideszi terek

8.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

°(a) Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.

°(b) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden alterében van ortonormált bázis.

°(c) Van olyan ortonormált vektorrendszer $\mathbb{R}^{1000}$-ben, amely nem egészíthető ki $\mathbb{R}^{1000}$ ortonormált bázisává.

°(d) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden n tagú ortonormált vektorrendszere bázis.

°(e) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden n tagú ortogonális vektorrendszere bázis.

°(f) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.

°(g) Az $\mathbb{R}^m$ és az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér pontosan akkor izomorf egymással, ha $m = n$.

°(h) A sík x-tengelyre való tükrözésének mátrixa $\mathbb{R}^2$ bármely bázisában szimmetrikus.

°(i) Ha egy mátrix nem diagonalizálható, akkor nem szimmetrikus.

°(j) Minden diagonalizálható mátrix szimmetrikus.

°(k) Bármely ortogonális lineáris transzformáció összes sajátértéke 1 abszolút értékű.

(l) Az ortogonális lineáris transzformációk éppen a bijektív lineáris transzformációk.

°(m) Ha φ ortogonális lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$.

°(n) Bármely ortogonális lineáris transzformáció minden mátrixának determinánsa 1.

(o) Ha egy lineáris transzformáció minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a transzformáció ortogonális.

(p) Ha egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban diagonális, és minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a lineáris transzformáció ortogonális.

8.2. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden u és v vektorára

(1) $u \perp v$ pontosan akkor, ha $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;

(2) $\|u\| = \|v\|$ pontosan akkor, ha $u + v \perp u - v$;

(3) $\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$.

Az (1) és (2) állítás a síkgeometria mely ismert tételeit általánosítja? Mi a (3) egyenlőség síkgeometriai jelentése?

8.3. Feladat°. Határozza meg a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorok által bezárt szöget:

(a) $n = 2,\ v_1 = (1, \sqrt{3}),\ v_2 = (\sqrt{3}, 1)$;

(b) $n = 2,\ v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),\ v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$;

(c) $n = 2,\ v_1 = (1, 0),\ v_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

(d) $n = 3,\ v_1 = (1, -1, 3),\ v_2 = (5, 2, -1)$;

(e) $n = 3,\ v_1 = (-2, 1, -1),\ v_2 = (1, 0, 1)$;

(f) $n = 3,\ v_1 = (3, -1, 2),\ v_2 = (2, 1, -1)$;

(g) $n = 4,\ v_1 = (-1, 2, 2, 0),\ v_2 = (2, -4, 5, 1)$;

(h) $n = 4,\ v_1 = (1, 2, 3, 0),\ v_2 = (2, 1, 1, 1)$;

(i) $n = 4,\ v_1 = (-1, 2, 4, -2),\ v_2 = (-1, 0, 1, 0)$.

8.4. Feladat°. Adjon meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben olyan 3 hosszúságú vektort, amely merőleges a v vektorra:

(a) $v = (-1, 1, 0)$;

(b) $v = (1, 4, 2)$.

8.5. Feladat.

°(1) Adjon meg olyan vektort a térben, amely merőleges az alábbi v_1, v_2 vektorokra.

(2) Ha vannak nem egy egyenesbe eső ilyen vektorok is, akkor adjon meg három ilyen vektort, melyek közül semelyik kettő sincs egy egyenesen.

(a) $v_1 = (0, 0, 0),\ v_2 = (1, 2, -2)$;

(b) $v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (2, 1, -1)$;

(c) $v_1 = (-1, 1, \sqrt{2})$, $v_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$.

8.6. Feladat. Adja meg a térben az alábbi s sík és P pont esetében a P pont s-re vonatkozó tükörképét:

°(a) $s\colon x - y = 0,\ P = (-2, 1, -1)$;
°(b) $s\colon x + y + z = 0,\ P = (1, 0, 0)$;
(c) $s\colon x + 2y - z = 3,\ P = (a, b, c)$.

8.7. Feladat°. Hajtson végre Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken:

(a) $n = 2,\ (4, 4), (0, 4)$;
(b) $n = 3,\ (1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;
(c) $n = 3,\ (1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;
(d) $n = 3,\ (1, -1, 1), (1, 3, 2), (4, 4, -1)$;
(e) $n = 4,\ (1, 1, -1, 1), (2, 1, -1, 0), (2, -1, 3, 2)$;
(f) $n = 4,\ (1, 1, -1, 1), (0, 3, 0, 1), (0, -3, 0, 7)$;
(g) $n = 4,\ (1, -2, 3, 0), (2, -7, 4, 1), (-3, 12, -5, -2)$;
(h) $n = 4,\ (1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$;
(i) $n = 4,\ (2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$.

8.8. Feladat. Adjon meg ortogonális bázist az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér megadott U altereiben, majd egészítse ki őket az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér ortogonális bázisává:

(a) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(b) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$;
(c) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$.

8.9. Feladat. Adja meg a térben az alábbi α szög, e egyenes és P pont esetén a P pont képét az e körüli α szögű elforgatás mellett:

(a) $\alpha = -\frac{\pi}{2},\ e\colon x = y, z = 0,\ P = (0, 0, 1)$;
(b) $\alpha = \frac{2\pi}{3},\ e\colon x = y = z,\ P = (1, 0, 0)$;
(c) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ e = [(1, 0, 1)],\ P = (1, 2, -3)$.

8.10. Feladat°. Ortogonálisak-e az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett alábbi φ lineáris transzformációk:

(a) $n = 2$, φ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(b) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/6$ szögű forgatás;
(c) $n = 3$, φ az origóra való tükrözés;
(d) $n = 3$, φ az $[(-2, 1, -1)]$ egyenes körüli $\pi/4$ szögű forgatás;
(e) $n = 2,\ \varphi\colon (x_1, x_2) \mapsto (-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;
(f) $n = 3,\ \varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_3)$;
(g) $n = 4,\ \varphi\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\frac{5}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4, \frac{12}{13}x_3 - \frac{5}{13}x_4, \frac{5}{13}x_1 - \frac{12}{13}x_2, -\frac{12}{13}x_1 + \frac{5}{13}x_2)$.

8.11. Feladat°. Ortogonálisak-e a következő mátrixok:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8.12. Feladat.

°(1) A megadott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz adjon meg olyan D diagonális mátrixot, amely előáll $D = B^{-1}AB$ alakban valamely B ortogonális mátrix esetén.

(2) Adjon meg ilyen B mátrixot is.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.13. Feladat.

°(1) Hajtson végre főtengely-transzformációt az alábbi kvadratikus alakokon, azaz ortogonális helyettesítéssel hozza őket kanonikus alakra.

(2) Adjon meg olyan ortogonális helyettesítést a mátrixával, amely erre az alakra hozza a kvadratikus alakot.

(a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(b) $-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$;
(c) $-2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
(d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;
(e) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

Szorgalmi feladatok

8.14. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden, legalább kétdimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.

8.15. Feladat. Egészítse ki (minél egyszerűbben) az $(1, -1, 1, 1)$ vektort olyan ortogonális bázissá $\mathbb{R}^4$-ben, melyben minden koordináta egész szám.

8.16. Feladat. Adjon meg az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

8.17. Feladat. Döntse el, hogy az $\mathbb{R}^3$ és $\mathbb{R}^4$ euklideszi tereken van-e olyan lineáris transzformáció, amely minden nullvektortól különböző vektort rá merőleges nullvektortól különböző vektorba visz.

8.18. Feladat. Legyen U altér az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben, és legyen $v \in \mathbb{R}^n$. Mutassa meg, hogy a $v + U$ halmaz pontosan egy U-ra merőleges vektort tartalmaz, és ez éppen $v + U$ legrövidebb eleme.

8.19. Feladat. Egy V euklideszi tér tetszőleges U altere esetén legyen

$$U^\perp = \{v \in V : v \perp u \text{ minden } u \in U \text{ esetén}\}.$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $U^\perp \leq V$,
(b) V minden eleme előáll, mégpedig egyféleképpen $u + u'$ alakban, ahol $u \in U$ és $u' \in U^\perp$.

8.20. Feladat. Egy V euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszere esetén tekintsük az ún. Gram-féle $\Gamma(u_1, \ldots, u_k) = \left|\langle u_i, u_j \rangle\right|_{n\times n}$ determinánst. Igazolja, hogy

(a) $\Gamma(u_1, \ldots, u_k) = 0$ pontosan akkor, ha az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer lineárisan függő;
(b) $\Gamma(u_1, \ldots, u_k)$ minden főminora nemnegatív.

8.21. Feladat. Legyen $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer egy V euklideszi térben, és jelölje $v_1, \ldots, v_k$ azt az ortogonális vektorrendszert, amelyet $u_1, \ldots, u_k$-ból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással kapunk. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\Gamma(u_1, \ldots, u_k) = \Gamma(v_1, \ldots, v_k)$;
(b) minden i $(1 \leq i \leq k)$-re $\|v_i\| \leq \|u_i\|$.

Mikor teljesül (b)-ben valamely $i > 1$ indexre a $\|v_i\| = \|u_i\|$ egyenlőség?

8.22. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonális mátrix, amelyre

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazza meg a fenti állítás geometriai jelentését.

8.23. Feladat. Hány egész számokból álló 3×3-as ortogonális mátrix van?

8.24. Feladat. Legyen φ és ψ lineáris transzformáció egy euklideszi téren. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. (Amelyik igaz, azt indokolja, amelyik nem, arra adjon ellenpéldát.)

(1) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi + \psi$ is az.
(2) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi\psi$ is az.
(3) Ha φ ortogonális, de ψ nem, akkor $\varphi\psi$ sem ortogonális.

8.25. Feladat. Ortogonális helyettesítéssel hozza kanonikus alakra a **??** Feladatbeli kvadratikus alakot.

8.26. Feladat. Ortogonális helyettesítéssel hozza kanonikus alakra a **??** Feladatbeli kvadratikus alakot.

8.27. Feladat. Ha egy szimmetrikus mátrix pozitív definit kvadratikus alak mátrixa, akkor nevezzünk magát a mátrixot is pozitív definitnek. Igazolja, hogy minden pozitív definit A mátrix esetén létezik olyan pozitív definit B mátrix, amelyre $B^2 = A$.