7. feladatsor – Kvadratikus alakok

7.1. Feladat°. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Minden kvadratikus alak kanonikus alakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.
(b) Minden kvadratikus alak normálalakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.
(c) Kvadratikus alakok bármely bázisban felírt mátrixának rangja ugyanaz.
(d) Bármely A négyzetes mátrixhoz létezik olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre az SAS^T mátrix diagonális.
(e) Bármely kvadratikus alak normálalakjában a pozitív tagok száma megegyezik a negatív tagok számával.
(f) Ha egy kvadratikus alak pozitív definit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba pozitív számot kapunk.
(g) Ha egy kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba nem kapunk pozitív számot.
(h) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A főminorai pozitívak.
(i) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A főminorai negatívak.

7.2. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi $\ell\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezések közül? Ha a leképezés bilineáris, akkor adja meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adja meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_2y_2$;
(b) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3$;
(c) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_1y_1$;
(d) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2$;
(e) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$.

7.3. Feladat°. Tekintse az alábbi, $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett kvadratikus alakokat.

(1) Hozza kanonikus alakra az adott kvadratikus alakot. Adja meg normálalakját is.
(2) Adjon meg egy olyan nemelfajuló lineáris helyettesítés mátrixát, amely az adott kvadratikus alakot kanonikus alakra hozza.
(3) Határozza meg a kvadratikus alak definitségi osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

(a) $n = 2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;
(b) $n = 2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
(c) $n = 3$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
(d) $n = 3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(e) $n = 3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
(f) $n = 3$, $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;
(g) $n = 3$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
(h) $n = 3$, $x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$;
(i) $n = 4$, $x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 8x_3x_4$;
(j) $n = 4$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
(k) $n = 8$, x_4x_7.

7.4. Feladat°. Tekintsük az alábbi A szimmetrikus mátrixokat. Adjon meg olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre az SAS^T mátrix diagonális.

(a) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
(b) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Szorgalmi feladatok

7.5. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_i x_k$ kvadratikus alakot.

7.6. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i<k} x_i x_k$ kvadratikus alakot.

7.7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha két kvadratikus alak bármelyikét át lehet vinni a másikba (akár elfajuló) lineáris helyettesítéssel, akkor nemelfajuló helyettesítéssel is át lehet vinni őket.

7.8. Feladat. Adjon példát olyan $\mathbb{R}^4$-en értelmezett kvadratikus alakra, amely

(a) 1 tagot tartalmaz és indefinit;
(b) 8 (nemnulla) tagot tartalmaz és pozitív definit;
(c) 6 (nemnulla) tagot tartalmaz és negatív szemidefinit.

7.9. Feladat. Mutassa meg, hogy egy pozitív definit kvadratikus alakban minden négyzetes tag együtthatója pozitív, de ez a tulajdonság nem elegendő ahhoz, hogy a kvadratikus alak pozitív definit legyen.

7.10. Feladat. Igazolja, hogy egy kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha mátrixa előáll QQ^T alakban, ahol Q nemelfajuló mátrix.

7.11. Feladat. Igaz-e, hogy tetszőleges azonos méretű pozitív definit A és B mátrix esetén

(a) $A + B$
(b) AB
(c) A^{-1}

is pozitív definit?

7.12. Feladat. Bizonyítsa be, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A minden főminora pozitív.

7.13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixában a főátlóra szimmetrikus összes aldetermináns pozitív. (Tehát az összes olyan aldetermináns pozitív, amely valamely $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ indexek esetén a mátrix azon elemeiből áll, amelyek az $i_1, i_2, \ldots, i_k$-adik sorok és ugyanilyen indexű oszlopok metszéspontjaiban állnak.)

7.14. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha egy pozitív definit kvadratikus alakhoz hozzáadjuk egy lineáris (azaz egy $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ ($c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$) alakú) kifejezés négyzetét, akkor az összegként kapott kvadratikus alak mátrixának determinánsa nagyobb, mint az eredeti kvadratikus alak mátrixának determinánsa.