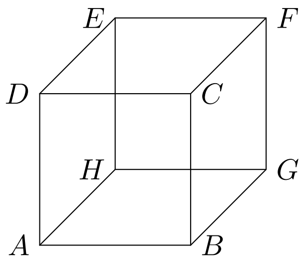
1. Feladatsor – Geometriai bevezető

1.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a)° Az ábrán látható kocka ED és GB éleinek egyenesei párhuzamosak.
(b)° Az ábrán látható kocka HF lapátlójának és DC élének egyenesei nem kitérők.
(c)° A kocka két lapátlójának egyenese nem lehet kitérő.
(d)° Bármely két különböző sík egyenesben metszi egymást.
(e) Két síknak lehet véges sok közös pontja.
(f) Ha három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos egymással, akkor egyetlen közös pontjuk van.
(g)° Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a síkban, melyek közül kettő nincs egy egyenesben, akkor a sík összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(h) Ha v_1, v_2 és v_3 olyan vektorok a síkban, melyekre v_3 előáll $c_1v_1 + c_2v_2$ alakban valamely c_1, c_2 valós számokra, akkor c_1 és c_2 egyértelműen meghatározott.
(i)° Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek nincsenek egy síkban, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(j) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek közül semelyik kettő nincs egy egyenesben, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.



1.2. Feladat. Tekintse az ábrán látható kockát.

(a)° Keresse meg az összes olyan élt, melyek egyenesei az EH él egyeneséhez képest kitérők.
(b) Adjon meg minél több olyan élt, melyek által meghatározott egyenesek egymáshoz képest páronként kitérők. Legfeljebb hány ilyen él adható meg? (Állítását indokolja.)

1.3. Feladat. Indokolja, hogy két kitérő egyenes bármelyikén át felvehető a másikkal párhuzamos sík.

1.4. Feladat. Indokolja, hogy ha egy egyenes párhuzamos két egymást metsző síkkal, akkor a metszésegyenesükkel is párhuzamos.

1.5. Feladat°. Váltsa át a fokokban megadott alábbi szögeket radiánra:

(a) $30°, 225°, -45°, 480°, -510°, 270°$;
(b) $0°, 150°, -60°, 900°, -765°, -210°$.

1.6. Feladat°. Váltsa át a radiánban megadott alábbi szögeket fokra:

(a) $-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3}, \frac{27\pi}{4}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}$;
(b) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{3}$.

1.7. Feladat°. Tekintsük a koordinátarendszerben az $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 4)$, illetve $D = (0, 4)$ pontokat. Végezze el az alábbi transzformációk egymásutánjait a pontokon. Adja meg a kapott pontok koordinátáit. (Használhat négyzetrácsos papírt.)

(a) tükrözés az $x = 4$ egyenesre, forgatás a $(4, 0)$ pont körül $\frac{\pi}{2}$ szöggel;

(b) forgatás a $(6,0)$ pont körül $-\frac{\pi}{2}$ szöggel, tükrözés a $(4,0)$ pontra;
(c) forgatás π-vel a $(0,1)$ körül, eltolás a $(4,1)$ vektorral, vetítés az $y = 1$ egyenesre.

1.8. Feladat. Az 1.7. Feladatban látottakhoz hasonlóan adja meg olyan transzformációk egymásutánjait, melyek az ottani A, B, C, D pontokat rendre a következő A', B', C', D' pontokba viszik.

(a)° $A' = (0,0)$, $B' = (-4,0)$, $C' = (-4,-4)$, $D' = (0,-4)$;
(b)° $A' = (-4,4)$, $B' = (-4,0)$, $C' = (0,0)$, $D' = (0,4)$;
(c)° $A' = (4,4)$, $B' = (4,0)$, $C' = (0,0)$, $D' = (0,4)$;
(d)° $A' = (0,4)$, $B' = (2,2)$, $C' = (4,0)$, $D' = (2,2)$;
(e)° $A = (51,-234)$, $B = (47,-234)$, $C = (47,-230)$, $D = (51,-230)$
(f) $A' = B' = C' = D' = (1,1)$.

1.9. Feladat. A fenti ábrán lévő kocka A csúcsából kiinduló három irányított élhez tartozó vektort jelölje rendre b, d és h. Döntse el, hogy az alábbi vektorokat megadó, A-ból kiinduló irányított szakaszok végpontjai csúcsok-e vagy sem. Ha csúcsok, akkor határozza meg, melyek.

(a) $b + d$,
(b) $h - b + d$,
(c) $h + h + b - h + d$,
(d) $h + (b - d + h - b - h) + (b + d - h - b + h)$,
(e) $10567h + 1056(b - 10h) - 6h - 105(10b + d) - 5b + 106d$.

1.10. Feladat°. Döntse el az alábbi vektorok esetén, hogy a v vektor előáll-e $c_1v_1 + c_2v_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ illetve $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ alakban. Ha igen, akkor adjon meg egy előállítást. Lehet-e több előállítást megadni?

(a) $v = (1,-1,1)$, $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$;
(b) $v = (1,2,3)$, $v_1 = (9,18,27)$, $v_2 = (0,0,0)$;
(c) $v = (1,1,1)$, $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (1,0,1)$;
(d) $v = (2,1,5)$, $v_1 = (2,1,5)$, $v_2 = (4,2,10)$;
(e) $v = (1,2,1)$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$;
(f) $v = (1,2,1)$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,1,0)$;
(g) $v = (3,2,1)$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,1,0)$.

1.11. Feladat. Döntse el, hogy a sík, illetve tér alábbi vektorai egy egyenesben, valamint térbeli vektorok esetén egy síkban vannak-e:

(a) $(2,1), (0,0), (-2,-1) \in \mathbb{R}^2$;
(b) $(1,-3), (2,2), (0,5) \in \mathbb{R}^2$;
(c) $(1,1,\sqrt{2}), (\sqrt{2},\sqrt{2},2), (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$;
(d) $(-1,3,1), (5,5,3), (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$;
(e) $(1,-1,2), (1,1,-1), (2,2,-1) \in \mathbb{R}^3$;
(f) $(-3,2,-1), (3,-1,3), (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$.

1.12. Feladat. Igazolja, hogy a $v_1 = (0,7,2)$, $v_2 = (1,6,1)$, $v_3 = (2,5,1) \in \mathbb{R}^3$ vektorok nincsenek egy síkban, és fejezze ki az

(a) $(1,-1,0)$;
(b) $(1,0,0)$;
(c) $(-3,3,2)$

vektort $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ alakban.

Szorgalmi feladatok

1.13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha három sík páronként metszi egymást, és a páronkénti metszésvonalak közül kettőnek van metszéspontja, akkor a harmadik is átmegy ezen a metszésponton.

1.14. Feladat. Adott két kitérő egyenes és egy pont, amely nincs rajta egyik egyenesen sem. Keressen olyan egyenest, amely átmegy az adott ponton, és mindkét egyenest metszi.

1.15. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha több egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor vagy valamennyi egy ponton megy át, vagy mindannyian egy síkban vannak.

1.16. Feladat. Vetítsünk merőlegesen egy térbeli pontot két egymást metsző síkra, majd a kapott pontokat vetítsük merőlegesen a metszésvonalra. Bizonyítsa be, hogy a kapott két pont egybeesik.

1.17. Feladat. Vetítsük a kockát merőlegesen az egyik testátlóra merőleges síkra. Bizonyítsa be, hogy a vetület szabályos hatszög.

1.18. Feladat. Adott két azonos méretű kocka. Bizonyítsa be, hogy az egyikből kivágható olyan „alagút”, amely teljes egészében a kocka belsejében halad, és amelyen a másik kockát végig lehet tolni.

1.19. Feladat. Állítsa elő a (térbeli) pontra való tükrözést síkra való tükrözések egymás utánjaként.