MBNK12: Logikai alapok

(előadásvázlat, 2016. június 15.)

Maróti Miklós

1. Ítéletkalkulus

1. Definíció. Ítéletnek nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az itélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet logikai értéke vagy igazságértéke igaz (vagy hamis). Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

2. Példa. Az alábbi mondatok közül A és B ítélet, de C és D nem az.

A: A Föld a Nap körül kering.
B: Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)
C: Miért kering a Föld a Nap körül?
D: Most nem mondok igazat.
(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

3. Példa. A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

F: Ha süt a nap, akkor kimegyek az uszodába.
G: Kimegyek az uszodába, és süt a nap.
H: Nem süt a nap.
I: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.
J: Kimegyek az uszodába, vagy süt a nap.
K: Akkor és csak akkor süt a nap, ha kimegyek az uszodába.

4. Definíció. Tetszőleges A, B ítéletre definiáljuk az alábbi összetett ítéleteket:

(1) A negációja a „nem A" ítélet, melynek jele $\neg A$;
(2) A, B konjunkciója az „A és B" ítélet, melynek jele $A \wedge B$;
(3) A, B diszjunkciója az „A vagy B" ítélet, melynek jele $A \vee B$;
(4) A, B implikációja a „ha A, akkor B" ítélet, melynek jele $A \to B$;
(5) A, B ekvivalenciája az „akkor és csak akkor A, ha B" ítélet, melynek jele $A \leftrightarrow B$.

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor prímitéletnek nevezzük.

5. Definíció. Az előző definicióban bevezetett öt logikai művelet műveletttáblázatai a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke kistámítható:

A	$\neg A$
h	**i**
i	**h**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
h	**h**	**h**	**h**	**i**	**i**
h	**i**	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**h**	**h**	**i**	**h**	**h**
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**

6. Példa. A mindennapi életben a „vagy" kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

L: Kávét hoz, vagy álmos. (megengedő vagy: akár mind a kettő megtörténthet.)
M: Gyalog megy, vagy biciklizik. (kizáró vagy: csak az egyik történhet meg.)

Az „A kizáró vagy B" ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

7. Példa. A „csak akkor A, ha B", „B szükséges feltétele A-nak", „A elegendő feltétele B-nek" és „ha A, akkor B" ítéletek mind ugyan azt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

N: Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.
O: A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.
P: Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütének.

Q: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

8. Definíció. Ítéletváltozónak nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az ítéletkalkulus formulái a következők:

(1) az ítéletváltozók mindegyike formula;
(2) ha F, G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula; és
(3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

9. Definíció. Azt mondjuk, hogy a G formula részformulája az F formulának, ha G fellép az F előző definícióban leírt előállítása során.

10. Példa. Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a prímítéleteket jelöli. Például a következő ítéletek

R: Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.
S: Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.
T: Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

egy lehetséges formalizálása a következő: $R = A \to B$, $S = (\neg B) \to (\neg A)$, $T = \neg\big((A \wedge (\neg B))\big)$, ahol az A és B ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába" és „Süt a nap" prímítéleteket jelöli.

11. Definíció. Ha adott az itéletváltozók igazságértéke, akkor a formula igazságértéke a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az itéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuka formula igazságtáblázatát.

12. Példa. A 10. példa T formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	**h**	**i**	**h**	**i**
h	**i**	**h**	**h**	**i**
i	**h**	**i**	**i**	**h**
i	**i**	**h**	**h**	**i**

13. Definíció. Az F és G formulák logikailag ekvivalensek, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblazata megegyezik). Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy $F \equiv G$. Egy F formulát tautológiának hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv \mathbf{i}$.

14. Tétel. Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

$\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

$$A \wedge A \equiv A, \qquad A \vee A \equiv A, \qquad \text{(idempotencia)}$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \qquad A \vee B \equiv B \vee A, \qquad \text{(kommutativitás)}$$
$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \qquad \text{(asszociativitás)}$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A, \qquad \text{(abszorptivitás)}$$
$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \qquad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \qquad \text{(disztibutivitás)}$$

$\neg$ alaptulajdonsága:

$$\neg(\neg A) \equiv A, \qquad \text{(dupla tagadás)}$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), \qquad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \qquad \text{(De Morgan szabályok)}$$

i és **h** alaptulajdonságai:

$$A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{i} \equiv A, \qquad A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i},$$
$$A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, \qquad A \vee \mathbf{h} \equiv A,$$
$$\mathbf{i} \to A \equiv A, \qquad \mathbf{h} \to A \equiv \mathbf{i},$$
$$A \to \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \qquad A \to \mathbf{h} \equiv \neg A,$$

$\to$ és $\leftrightarrow$ alaptulajdonságai:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B, \qquad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$
$$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A), \qquad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$$
$$A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C, \qquad (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$$
$$A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C), \qquad (A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C).$$

15. Tétel. Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

16. Tétel. Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

17. Következmény. Minden formula logikailag ekvivalens egy olyan formulával, amelyben csak negáció, konjunkció (és diszjunkció) szerepel.

18. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak konjunkció, diszjunkció és negált illetve negálatlan itéletváltozó szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F-ből úgy kapunk, hogy

(1) minden $\vee$ jelet $\wedge$-re cserélünk,
(2) minden $\wedge$ jelet $\vee$-re cserélünk,
(3) minden A negálatlan ítéletváltozót $\neg A$-ra cserélünk, és
(4) minden $\neg A$ negált ítéletváltozót A-ra cserélünk.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

19. Példa. Legyen $F = A \wedge (B \vee \neg C)$. Ekkor $\neg F \equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$. Figyelem, fontos, hogy csak ítéletváltozók lehetnek negálva az F formulában. Például ha $F = A \wedge \neg(B \vee \neg C)$, akkor $\neg F \not\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$, hanem $\neg F \equiv \neg A \vee (B \vee \neg C)$.

20. Definíció. Az F formulát diszjunktív normálformának nevezünk, ha $F = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_t$ alakú, ahol $K_1, \ldots, K_t$ mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója. Az $A_1, \ldots, A_n$ változókból felépített diszjunktív normálforma teljes, ha $K_1, \ldots, K_t$ páronként különböző n-tagú konjunkciók, amelyekben az $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul.

21. Tétel. Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

2. Predikátumkalkulus

22. Definíció. Predikátumnak nevezzük az olyan függvényt vagy kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk. A predikátum változóit individuumváltozóknak, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét individuumtartománynak nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

23. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

(1) $O(x, y)$: „x osztója y-nak”,
(2) $P(x)$: „az x szám prím”,
(3) $F(x)$: „az x szám felbonthatatlan”,
(4) $M(x, y, z)$: „az x és y számok szorzata z”.

24. Definíció. Tetszőleges A ítéletre és x individuumváltozóra definiáljuk az alábbi ítéleteket:

(1) „minden x-re A”, melynek neve univerzális kvantifikáció és jele $(\forall x)A$;
(2) „létezik x, hogy A”, melynek neve egzisztenciális kvantifikáció és jele $(\exists x)A$.

25. Példa. Minden ítélet, amely egy adott individuumtartomány elemeiről állít valamit, formalizálható. Például az előző példa predikátumait felhasználva a következő ítéleteket formalizáljuk:

(1) „tetszőleges a, b, c egész számokra ha $a \mid b$ és $b \mid c$ akkor $a \mid c$”

$$(\forall a, b, c)\big((O(a, b) \wedge O(b, c)) \to O(a, c)\big);$$

(2) „az a szám akkor és csak akkor osztója b-nek, ha létezik olyan c egész szám, hogy $ac = b$”

$$O(a, b) \leftrightarrow (\exists c)(M(a, c, b));$$

(3) „minden prímszám felbonthatatlan”

$$(\forall a)(P(a) \to F(a)).$$

26. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $\forall$ kvantor után általában implikációt, a $\exists$ kvantor után pedig ést használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug” $(\forall x)(P(x) \to H(x))$ és a „létezik olyan politikus, aki hazug” $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ítéletek formalizálásai mutatják.

27. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát (aritását). A nullváltozós függvényjeleket individuumkonstansoknak nevezzük. Ekkor a predikátumkalkulus (első rendű nyelv) kifejezései a következők:

(1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés;
(2) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n-változós függvényjel, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezés; és
(3) minden kifejezés az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

A predikátumkalkulus (első rendű nyelv) formulái a következők:

(1) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n-változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \dots, t_n)$ prímformula;
(2) ha F, G formulák és x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike összetett formula; és
(3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

28. Példa. Tartalmazza $\mathcal{F} = \{\cdot\}$ a szokásos 2-változós szorzás függvényjelet és $\mathcal{R} = \{=\}$ a szokásos 2-változós egyenlőség predikátumjelet. Ekkor az számelméletnél bevezetett oszthatóságra vonatkozó definiciókat és állításokat mind formalizálhatjuk. Például a „tetszőleges a, b, c egészekre ha a osztja b-t és b osztja c-t, akkor a osztja c-t” ítélet egy lehetséges formalizálása a következő:

$$(\forall a, b, c)\big(\big((\exists x)(a \cdot x = b) \wedge (\exists x)(b \cdot x = c)\big) \to (\exists x)(a \cdot x = c)\big).$$

29. Definíció. A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F-et a kvantor hatáskörének hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F-beli előfordulásait kötöttnek nevezzük, minden nem kötött előfordulást szabadnak nevezünk. Egy formula szabad változói alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula zárt, ha nincs szabad változója.

30. Példa. Az

$$(\forall x)\big((\exists y)(x \cdot y = z) \to (x = y)\big)$$

formulában a z változó szabadon fordul elő, az y változó kétszer fordul elő, először kötötten majd szabadon, az x változó szintén kétszer fordul elő, mindekettőször kötötten. Tehát a formula szabad változói y és z. A y változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mint ha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\forall x)\big((\exists t)(x \cdot t = z) \to (x = y)\big).$$

31. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ halmazát, az U individuumtartományt, és rajta a függvényjelek és predikátumjelek egy interpretációját, azaz minden n-változós $f \in \mathcal{F}$ függvényjelre egy $f\colon U^n \to U$ függvényt, és minden n-változós $P \in \mathcal{P}$ predikátumjelre egy $P\colon U^n \to \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ predikátumot. Ha t olyan kifejezés, melynek változói szerepelnek az $x_1, \dots, x_n$ változók között, akkor az individuumtartományon értelemszerűen definiáljuk az n-változós $t(x_1, \dots, x_n)$

függvényt a kifejezés felépítése szerint, melyet a t kifejezés interpretációjának nevezzük. Ha F olyan formula, melynek szabad változói szerepelnek az $x_1, \ldots, x_n$ változók között, akkor az individuumtartományon értelemszerűen definiáljuk az n-változós $F(x_1, \ldots, x_n)$ predikátomot a formula felépítése szerint, melyet az F formula interpretációjának nevezzük.

32. Példa. Tekintsük az $F = ((\exists z)(x \cdot z = y)) \wedge ((\exists z)(y \cdot z = x))$ formulát. Ennek a formulának x és y a szabad változója, tehát minden individuumtartományon (amelyen van szorzás és egyenlőség értelmezve) meghatároz egy kétváltozós $F(x, y)$ predikátumot. Az egész számok halmazán ez a predikátum ekvivalens az $x = \pm y$ predikátummal. Fontos, hogy a formula interpretációja függ az individuumtartománytól és a függvényjelek és predikátumjelek rajta való interpretációjától. Ha például a $\cdot$ függvényjel alatt az összeadást értenénk az egész számok halmazán, akkor $F(x, y)$ az azonosan igaz predikátum lenne.

33. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F és G formulák logikailag ekvivalensek, és azt írjuk hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját a formulák által meghatározott $F(x_1, \ldots, x_n)$ és $G(x_1, \ldots, x_n)$ predikátumok megegyeznek. Egy F formulát tautológiának hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

34. Tétel. Legyenek F, G tetszőleges formulák, H pedig olyan formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F, \\ \neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F), \\ (\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G, \\ (\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H. \end{aligned}$$

35. Tétel. Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikalilag ekvivalens formlulákat kapunk.

36. Tétel. Ha egy formula részformuláját egy vele logikalilag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

37. Megjegyzés. Az ítéletkalkulussal ellentétben nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

38. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak univerzális kvantor, egzisztenciális kvantor, konjunkció, diszjunkció és negált illetve negálatlan prímformula szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F-ből úgy kapunk, hogy

(1) minden $\forall$ jelet $\exists$-re cserélünk,
(2) minden $\exists$ jelet $\forall$-re cserélünk,
(3) minden $\vee$ jelet $\wedge$-re cserélünk,
(4) minden $\wedge$ jelet $\vee$-re cserélünk,
(5) minden A negálatlan prímformulát $\neg A$-ra cserélünk,
(6) minden $\neg A$ negált prímformulát A-ra cserélünk, és
(7) minden kifejezést meghagyunk a prímformulákban.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

3. Következményfogalom

39. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ formulák véges vagy végtelen halmaza, és B formula. Azt mondjuk, hogy B logikai következménye a $\mathcal{A}$ formuláknak, és ezt $\mathcal{A} \models B$-el jelöljük, ha tetszőleges értéket adva az ítéletváltozóknak (vagy a predikátumkalkulus esetén tetszőleges individuumtartományt és interpretációt véve) minden olyan esetben, amikor a $\mathcal{A}$ formulák mindegyike igaz, B is igaz. Az $\mathcal{A}$ elemeit premisszáknak, B-et pedig konklúziónak nevezzük.

40. Példa. Tekintsük az alábbi következtetést az ítéletkalkulusban: „Ha 4 osztható 2-vel, akkor 4 páros. Ha 4 páros, akkor 44 is páros. 44 páros. Tehát 4 páros.” Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy az $A \to B, B \to C, C \models B$ következtetés logikailag helyes-e. Az $A = \mathbf{h}$, $B = \mathbf{h}$ és $C = \mathbf{i}$ értékadás mellett látjuk hogy a premisszák mindegyike igaz, a konklúzió viszont nem, tehát a következtetés logikailag nem helyes.

41. Példa. Tekintsük az alábbi következtetést a predikátumkalkulusban: „x akkor és csak akkor osztója y-nak, ha létezik olyan z, hogy $xz = y$. Tehát ha x osztója y-nak és y osztója z-nek, akkor x osztója z-nek”. Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy a $(\forall x, y)(O(x, y) \leftrightarrow (\exists z)(xz = y)) \models (O(x, y) \land O(y, z)) \to O(x, z)$ logikai következtetés helyes-e.

Megmutatjuk, hogy a következtetés nem helyes, amihez elég mutatni egy megfelelően választott individuumtartományt és a függvényjelek és predikátumjelek megfelelő interpretációját, ahol a premisszák teljesülnek, de a konklúzió nem. Legyen $\{0, 1, 2\}$ az individdumtartomány, a szorzásjel és az O predikátumjel interpretációi a következők

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	0
1	0	0	2
2	0	0	0

O	0	1	2
0	**i**	**i**	**h**
1	**i**	**h**	**i**
2	**i**	**h**	**h**

Ekkor a premissza teljesül (függetlenül attól, hogy hogyan adunk értéket a konkúzióban szereplő szabad változóknak, mivel a premissza zárt formula), a konkúzió viszont nem, például az $x = 0$, $y = 1$ és $z = 2$ értékadásnál. Nyilványvalóan az a gond, hogy a szorzásjel interpretációja nem asszociatív. Ha felvennénk a premisszák közé a $(\forall x, y, z)(x(yz) = (xy)z)$ formulát, akkor a következtetés már helyes lenne. (Megjegyezzük, hogy a pozitív egészek halmazán a hatványozás szintén nem asszociatív, de ott a konklúzió mégis teljesül.)

42.* Tétel (Wilkie azonosság). A pozitív egészek körében tekintsük az alábbi azonosságot:

$$\left((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\right)^x \cdot \left((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x\right)^y$$
$$= \left((1+x)^x + (1+x+x^2)^x\right)^y \cdot \left((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\right)^x.$$

Bevezetve az $A = x+1$, $B = x^2+x+1$, $C = x^3+1$, és $D = x^4+x^2+1$ jelöléseket láthatjuk, hogy $C = A\cdot(x^2-x+1)$ és $D = B\cdot(x^2-x+1)$, ezért az azonosság mindkét oldala egyenlő az $(A^x + B^x)^y \cdot (A^y + B^y)^x \cdot (x^2 - x + 1)^{xy}$ számmal. Viszont ez az azonosság logikailag nem következménye a középiskolában tanult azon 11 azonosságnak, amelyben csak az összeadás, szorzás, hatványozás és az 1 konstans szerepel, mert van olyan interpretáció amelyben ezek teljesülnek a fenti azonosság viszont nem.

43. Tétel. Legyen $A_1, \dots, A_n, B$ formulák. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(1) $A_1, \dots, A_n \models B$,
(2) $A_1 \land \dots \land A_n \models B$,
(3) $\models (A_1 \land \dots \land A_n) \to B$.
(4) $(A_1 \land \dots \land A_n) \to B$ tautológia.

44. Definíció. Feltételes bizonyításról beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \models B \to C$ következtetés helyett a $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$ következtetést bizonyítjuk. Indirekt bizonyításról beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \models B$ következtetés helyett az $\mathcal{A} \cup \{\neg B\} \models \mathbf{h}$ következtetést bizonyítjuk. Kontrapozícióval való bizonyításról beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$ következtetés helyett az $\mathcal{A} \cup \{\neg C\} \models \neg B$ következtetést bizonyítjuk.

45.* Tétel (Kompaktsági tétel). $\mathcal{A} \models B$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan véges $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ részhalmaz, amelyre $\mathcal{A}_0 \models B$.

46.* Következmény. Nem létezik olyan formula, amely akkor és csak akkor igaz egy véges gráfra, ha az összefüggő.

47. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ formulák halmaza kielégíthető, ha van olyan individuumtartomány, a függvény- és predikátumjelek olyan interpretációja és a szabad változók olyan értékadása, amely mellett az $\mathcal{A}$ formulák mindegyike igaz.

48. Tétel. Formulák $\mathcal{A}$ halmaza akkor és csak akkor elégíthető ki, ha minden véges $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ részhalmaza kielégíthető.

49.* **Következmény.** Egy gráf akkor és csak akkor háromszínezhető, ha minden véges részgráfja háromszínezhető.