9. feladatsor – Számosságok

9.1. Feladat. Határozzuk meg $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|$-t (lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.2. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $(0, 1)$ és $[0, 1]$ halmazok között.

9.3. Feladat. Határozzuk meg $\left|\mathbb{Q}^2\right|$-t (lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.4. Feladat. Adjunk meg bijekciót

(1) az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között, és
(2) az $\{a \in \mathbb{N} : a \geq 10\}$ és a $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ halmazok között.

9.5. Feladat. Fixpontmentesnek nevezünk egy π permutációt, ha minden elemet mozgat. Határozzuk meg S_6-ban a

(1) fixpontmentes permutációk számát,
(2) a fixpontmentes páros permutációk számát.

9.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a

(1) $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, valamint a
(2) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

halmazok között.

9.7. Feladat. Határozzuk meg S_8 azon páros permutációt, melyek pontosan

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

elemet mozgatnak.

9.8. Feladat. Adjuk meg S_{12} összes olyan páros π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

9.9. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$

(1) szürjektív leképezést, és
(2) injektív leképezést.

9.10. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok között.

9.11. Feladat. Határozzuk meg S_5-ben, S_7-ben, illetve S_9-ben az olyan permutációk számát, melyek páronként idegen ciklusokra bontott alakjában egy 3 és egy 4 hosszú ciklus van.

9.12. Feladat. Határozzuk meg S_6 azon elemeit, amelyek pontosan

(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4

elemet mozgatnak.

9.13. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazok között.

9.14. Feladat. Határozzuk meg $|\mathbb{N} \times \{1,2\}|$-t (lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.15. Feladat. Adjunk meg szürjektív leképezést $\mathbb{R}$-ről $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-re.

9.16. Feladat. Határozzuk meg $|P(\mathbb{Q})|$-t (lehetséges válaszok: $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$). A választ természetesen indokolni kell.

9.17. Feladat. Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

9.18. Feladat. Adjunk meg bijekciót
(1) az $(1,5)$ és $\mathbb{R}$ halmazok között, és
(2) az $(1,5)$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között.

9.19. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.
(1) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(2) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni.
(3) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

9.20. Feladat. Fixpontmentesnek nevezünk egy π permutációt, ha minden elemet mozgat. Határozzuk meg S_5-ben a
(1) fixpontmentes permutációk számát,
(2) a fixpontmentes páratlan permutációk számát.

9.21. Feladat. Adjunk meg bijekciót
(1) a hárommal nem osztható pozitív egész számok és a páros számok között, és
(2) az $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ és az $\mathbb{R}$ halmazok között.

9.22. Feladat. Határozzuk meg S_5-ben, hogy melyik ciklus-típusú permutációból hány van (a ciklus-típus a páronként idegen ciklusokra bontott alakban szereplő ciklusok hosszaiból képzett monoton növekvő sorozat).

Természetesen akinek a sorszáma 22-nél nagyobb, az vegye a 22-es maradékát.