

8. feladatsor – Permutációk

A feladatsorban \mathbb{R}^+ , illetve \mathbb{R}^- jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \dots\}$ halmazt \mathbb{N} jelöli és $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

8.1. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$,
- (2) $(4\ 5\ 6)\pi(6\ 5\ 4) = (4\ 5\ 7)(1\ 6\ 2\ 3)$.

8.2. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^3$,
- (2) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{6600}$,
- (3) $((1\ 2\ 3)(4\ 2\ 5)^{-1}(6\ 7\ 2\ 1))^{340}$.

8.3. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^6$,
- (2) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{5000}$,
- (3) $((1\ 2\ 3)(4\ 5\ 1)^{-1}(3\ 6\ 7\ 1))^{342}$.

8.4. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $\pi(1\ 2\ 3) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 6)$,
- (2) $(2\ 6\ 4)\pi(4\ 6\ 2) = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 7)$.

8.5. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban (a felülvonás a 9-es maradékot jelöli), valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $\varphi: [9] \rightarrow [9], x \mapsto \overline{5x}$,
- (2) $\gamma \in S_8, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 5\ 7)^{-1}(2\ 4\ 3\ 6) \in S_7$.

8.6. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5), \pi \in S_5$,
- (2) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5), \pi \in S_{10}$,
- (3) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \pi \in S_{10}$.

8.7. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban (a felülvonás a 9-es maradékot jelöli), valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $\varphi: [9] \rightarrow [9], x \mapsto \overline{4x}$,
- (2) $\gamma \in S_8, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\delta = (1\ 2\ 4)(2\ 5\ 6\ 7)^{-1}(2\ 5\ 3\ 6) \in S_7$.

8.8. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^4$,
- (2) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{6000}$,
- (3) $((1\ 2\ 3\ 4)(8\ 2\ 7)^{-1}(7\ 1\ 5\ 6))^{340}$.

8.9. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban (a felülvonás a 8-as maradékot jelöli), valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $\varphi: [8] \rightarrow [8], x \mapsto \overline{5x}$,
- (2) $\gamma \in S_8, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 5\ 7)^{-1}(2\ 5\ 3\ 6) \in S_7$.

8.10. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $(1\ 2\ 3)\pi = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 6)$,
- (2) $(1\ 2\ 3)\pi(2\ 6\ 4) = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 7)$.

8.11. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$,
- (2) $(3\ 2\ 1)\pi(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 6)$.

8.12. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban (a felülvonás a 7-es maradékot jelöli), valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $\varphi: [7] \rightarrow [7], x \mapsto \overline{3x}$,
- (2) $\gamma \in S_8, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\delta = (1\ 2\ 3\ 4)(3\ 5\ 6)^{-1}(7\ 4\ 3\ 6) \in S_7$.

8.13. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban (a felülvonás a 8-as maradékot jelöli), valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $\varphi: [8] \rightarrow [8], x \mapsto \overline{3x}$,
- (2) $\gamma \in S_8, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\delta = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 7)^{-1}(2\ 5\ 7\ 6) \in S_7$.

8.14. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

- (1) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5), \pi \in S_5$,
- (2) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5), \pi \in S_{10}$,
- (3) $\pi^4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \pi \in S_{10}$.

8.15. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban, valamint döntsük el, hogy párosak, illetve páratlanok-e.

- (1) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^6$,
- (2) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^{1111}$,
- (3) $((1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 7)^{-1}(3\ 1\ 2\ 5\ 6))^{333}$.

Természetesen akinek a sorszáma 15-nél nagyobb, az vegye a 15-ös maradékát.