7. feladatsor – Leképezések, relációk

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli. $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

6.1. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (2,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(1) $(\exists x)(\forall y)(y, x) \in \alpha$,
(2) $(\exists x)(\forall y)(x, y) \in \alpha$,
(3) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big((x, y) \in \alpha\big) \to \big((x, z) \in \alpha \wedge (z, y) \in \alpha\big)$.

6.2. Feladat. Határozzuk meg a következő α, β megfeleltetések $\alpha\beta$ szorzatát.

(1) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad\beta = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(2) $\alpha = \{(x, y) : x \leq y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ $\quad\beta = \{(x, y) : |x - y| < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

6.3. Feladat. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz alábbi részhalmazai előállnak-e $A \times B$ alakban alkalmas $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazokkal.

(1) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\}$,
(2) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,
(3) $\{(x, y) : x = 2, y \text{ tetszőleges}\}$,
(4) $\{(x, y) : x - y \in \mathbb{Z}\}$.

6.4. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, x \mapsto |x + 3| - 1$,
(2) $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3 - 8}{7}$,
(3) $\gamma \colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto p + q,$ ahol $(p, q) = 1, p, q > 0$,
(4) $\delta \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto p,$ ahol $(p, q) = 1, q > 0$.

6.5. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

(1) $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x - 8}{5}$,
(2) $\beta \colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$,
(3) $\gamma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x\gamma = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x + 1 & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}.$

6.6. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1,1), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(1) $(\forall x)(x, x) \in \alpha$,
(2) $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \alpha) \to ((y, x) \in \alpha)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((x, y) \in \alpha \wedge (y, x) \in \alpha\big) \to x = y$.

6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő α, β megfeleltetések $\alpha\beta$ szorzatát.

(1) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad\beta = \{(x, y) : y = 2x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(2) $\alpha = \{(x, y) : |x - y| < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ $\quad\beta = \{(x, y) : x \leq y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

6.8. Feladat. Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyek leképezések közülük?

(1) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

6.9. Feladat. Döntsük el, hogy injektív, szürjektív, illetve bijektív-e a következő φ leképezés, és adjuk meg a φ^2 leképezést:

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n\varphi = \begin{cases} n - 10, & \text{ha } n > 10, \\ 1, & \text{ha } n \leq 10. \end{cases}$$

6.10. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (1, 3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(1) $(\forall x)(x, x) \in \alpha$,
(2) $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \alpha) \to ((y, x) \in \alpha)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((x, y) \in \alpha \wedge (y, x) \in \alpha\big) \to x = y$.

6.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyek leképezések közülük?

(1) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
(2) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

6.12. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α-ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

(1) $(\forall x)(x, x) \in \alpha$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big((x, y) \in \alpha \wedge (y, x) \in \alpha\big) \to x = y$,
(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x, y) \in \alpha \wedge (y, z) \in \alpha\big) \to (x, z) \in \alpha$.

6.13. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto |x| + 1$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-8}{7}$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q$, ahol $(p, q) = 1, p, q > 0$,
(4) $\delta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto q$, ahol $(p, q) = 1, p, q > 0$.

6.14. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{8x-3}{7}$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-, x \mapsto -x^2$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x\gamma = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \text{ páros}, \\ x + 1 & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$.

6.15. Feladat. Döntsük el, hogy injektív, szürjektív, illetve bijektív-e a következő φ leképezés, és adjuk meg a φ^2 leképezést:

$$\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n\varphi = \begin{cases} 6n+1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 6n-1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Természetesen akinek a sorszáma 15-nél nagyobb, az vegye a 15-ös maradékát.