4. feladatsor – Predikátumkalkulus

4.1. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha nem esik az eső, nem húzom fel az esernyőmet. Csak akkor húzom fel az esernyőmet, ha nálam van, és esik. Ha esik az eső, akkor van nálam esernyő.
(2) Tehát, ha esik az eső, akkor felhúzom az esernyőmet.

4.2. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\exists x)\Big(P\big(f(y,a),x\big) \wedge \neg Q(a)\Big) \leftrightarrow (\forall y)\Big(P\big(f(x,a),y\big)\Big).$$

4.3. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi műveleti jelet, predikátumokat, illetve konstanst:

$$f(x,y) = xy;\ O(x,y) : x \text{ osztja } y\text{-t};\ E(x,y) : x = y;\ c = 17$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(O(x,y) \to E(y, f(x,z))\big)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big((O(x,y) \wedge O(y,x)) \to E(x,y)\big)$,
(3) $(\forall x)(\exists y)E(f(x,y), 17)$.

4.4. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a \leq b,\ E(a,b) : a = b.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)P(x,x)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((P(x,y) \wedge P(y,x)) \to E(x,y)$,
(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \vee P(y,x))$.

4.5. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi műveleti jelet, predikátumokat, illetve konstanst:

$$f(x,y) = xy;\ g(x,y) = x + y;\ O(x,y) : x \text{ osztja } y\text{-t};\ E(x,y) : x = y;\ c = 17$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)\big(O(x, f(y,z)) \to (O(x,y) \vee O(x,z))\big)$,
(2) $(\exists x)(\exists y)\big(\neg E(x,y) \wedge O(x,y) \wedge O(y,x) \wedge O(x, g(x,y))\big)$,
(3) $(\exists a)(\exists b)\big(\neg O(x,y) \wedge E(x, f(y,y))\big)$.

4.6. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) A $\sqrt{2}$ szám vagy racionális, vagy irracionális. Ha $\sqrt{2}$ racionális, akkor $(\sqrt{2})^2$ is racionális. Vagy $\sqrt{2}$, vagy $(\sqrt{2})^2$ nem racionális.
(2) Tehát $\sqrt{2}$ irracionális.

4.7. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós művelet A-n, melyre

$$f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$Q(x) : x \text{ páros};\ E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(x), y)\big)$,
(2) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(y), x)\big)$,
(3) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(x), y)\big)$,
(4) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(y), x)\big)$,
(5) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x))$.

4.8. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha esik az eső és süt a nap, akkor szivárvány lesz. Ha nem süt a nap, akkor vagy esik az eső, vagy köd van. Csak akkor lehet szivárvány, ha süt a nap.
(2) Tehát, ha szivárvány van, akkor nincs köd.

4.9. Feladat. Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

(1) $A \vee (\neg A \to B)$,
(2) $(A \wedge \neg C) \leftrightarrow (\neg B \vee C)$.

4.10. Feladat. Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

(1) $A \to (\neg A \vee B)$,
(2) $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee C)$.

4.11. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P\big(f(x, a), x\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y, x), y\big) \wedge Q(x)\Big).$$

4.12. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.
(2) Tehát a 2 prímszám.

4.13. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$S(x) : x$ szomorú	$e :$ én
$E(x, y) : x$ az y ellensége	$B(x, y) : x$ az y barátja.

(1) Senki sem szomorú.
(2) Nem vagyok szomorú.
(3) Van olyan ember, akinek senki sem ellensége.
(4) Van olyan ember, akinek nincs barátja, mégsem szomorú.
(5) Van olyan ellenségem, akinek nem minden ellensége a barátom.

(6) Mindenkinek van olyan barátja, aki nem az ellenségem.

4.14. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*”,	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$C(x,y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,	p: „*Péter*”.

(1) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
(2) Péter hallgató.
(3) Hallgatók csoporttársai is hallgatók.
(4) Péter összes csoporttársa felkészült a vizsgára.
(5) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.
(6) Van olyan hallgató, akinek semelyik csoporttársa sem készült fel a vizsgára.

4.15. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi műveleti jeleket, predikátumokat, illetve konstansokat:

$$f(x,y) = x + y \quad g(x,y) = xy$$
$$P(x) : x \text{ páros}$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(f(x, g(y,z)) = f(g(x,y), g(x,z)))$,
(2) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\,(f(x,y) = z)$,
(3) $(\forall x)\big(\neg P(x) \to (\forall y)\,(P(y) \vee P(f(x,y)))\big)$.

4.16. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*”,	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$C(x,y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,	p: „*Péter*”.

(1) Minden hallgató felkészült a vizsgára.
(2) Péter nem hallgató.
(3) Van olyan hallgató, akinek van nem hallgató csoporttársa.
(4) Péternek van olyan csoporttársa, aki nem készült fel a vizsgára.
(5) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.
(6) Minden hallgatónak van olyan csoporttársa, amelyik felkészült a vizsgára.

4.17. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$S(x) : x$ szomorú	$e :$ én
$E(x,y) : x$ az y ellensége	$B(x,y) : x$ az y barátja.

(1) Van, aki szomorú.
(2) Szomorú vagyok.
(3) Mindenkinek vannak ellenségei.
(4) Akinek nincs barátja, az szomorú.
(5) Az ellenségem ellensége a barátom.
(6) Van olyan ember, akinek minden barátja az ellenségem.

4.18. Feladat. Legyen az individuumtartomány a **pozitív** egész számok halmaza és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a \mid b, \;\; E(a,b) : a = b.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)P(x,x)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((P(x,y) \wedge P(y,x)) \to E(x,y)$,
(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \vee P(y,x))$.

4.19. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós művelet A-n, melyre

$$f(1) = 3, \;\; f(2) = 2, \;\; f(3) = 1, \;\; f(4) = 2, \;\; f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a + b = 5; \;\; Q(x) : x \text{ páros}; \;\; E(x,y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)\big(\neg E(x,y) \to \neg E(f(x), f(y))\big)$,
(2) $(\exists x)(\forall y)\big(\neg E(f(y), x)\big)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y))\big)$,
(4) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$.

4.20. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Sári és Béla azonos korú, vagy Sári idősebb Bélánál. Ha Sári és Béla azonos korú, akkor Nelli és Béla nem azonos korú. Ha Sári idősebb Bélánál, akkor Béla idősebb Tibornál.
(2) Tehát Nelli és Béla nem azonos korú, vagy Béla idősebb Tibornál.

Természetesen akinek a sorszáma 20-nál nagyobb, az vegye a 20-as maradékát.