13. Ismétlés

Ha valakinek a sorszáma nagyobb mint 3, akkor azt a feladatot oldja meg, melynek a sorszáma vele kongruens modulo 3. Két pontot kap az, akinek 0 vagy 1 hibája van, és 1 pontot az, akinek 2 vagy 3 hibája van a 20 kérdésből. Minden választ röviden indokolni kell!

1. Feladat. Igazak-e az alábbi állítások?

(1) Szimmetrikus relációk metszete is szimmetrikus.
(2) Az ítéletkalkulusbeli formulák halmazán a logikai ekvivalencia ekvivalenciareláció.
(3) Predikátumkalkulusban van olyan algoritmus, amellyel eldönthető, hogy két formula logikailag ekvivalens-e.
(4) A $\mathbb{Z}_{29}^*$ csoportban $\overline{9}$ rendje 7.
(5) $|\mathbb{Z}| < |\mathbb{Q}|$
(6) Az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció tranzitív, ha bármely $a, b, c \in A$-ra teljesül a következő, ha $(a, c) \in \alpha$ és $(b, c) \in \alpha$, akkor $(a, b) \in \alpha$.
(7) A $\mathbb{Z}_{23}^*$ csoportban $\overline{17}^{-1}$ páros (mint 0 és 22 közötti maradék).
(8) Az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció antiszimmetrikus, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül a következő, ha $(a, b) \in \alpha$ és $(b, a) \in \alpha$, akkor $a = b$.
(9) Minden bijektív leképezés permutáció.
(10) Az S_8 csoportban $(1\ 3\ 4)(5\ 3\ 7)(2\ 6)$ rendje 6.
(11) Minden páros hosszú ciklus páratlan permutáció.
(12) Az $\mathbb{N}$ halmazon minden injektív leképezés bijektív.
(13) Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A \times B| = n + m$.
(14) Bármely halmaznak mindig részhalmaza az üres halmaz.
(15) $|S_3| = 6$
(16) A $\varrho = \emptyset \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ reláció szimmetrikus.
(17) A $\mathbb{Z}_{29}^*$ csoportban $\overline{3}$ rendje 28.
(18) A szimmetrikus különbség művelet asszociatív a $\mathcal{P}(U)$ halmazon.
(19) Két halmaz metszetén azon elemek halmazát értjük, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.
(20) Minden A halmazon értelmezett részbenrendezéshez tartozik az A-nak egy osztályozása.

2. Feladat. Igazak-e az alábbi állítások?

(1) Minden leképezés permutáció.
(2) Ha $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezések, akkor fg is bijektív.
(3) Az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezés hálószerűen rendezett.
(4) Ha π k-hosszúságú ciklus, akkor $\pi^{k-1} = \pi^{-1}$.
(5) A $\varrho = \emptyset \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ reláció reflexív.
(6) S_3-ban 3 olyan π permutáció van, amelyre $|M_\pi| = 3$.
(7) Az ítéletkalkulusbeli formulák halmazán a logikai következmény reláció részbenrendezés.

(8) A $\mathbb{Z}_{23}^*$ csoportban $\overline{17}^{-1}$ páratlan (mint 0 és 22 közötti maradék).
(9) Ha $|A| = n$, $|B| = m$ és az A és B halmazok diszjunktak, akkor $|A \cup B| = nm$.
(10) Bármely lineáris kongruencia-rendszert meg lehet oldani kínai maradéktétel segítségével.
(11) $|S_2| = 1$
(12) Tranzitív relációk metszete is tranzitív.
(13) Az $F = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C))$ formula az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma.
(14) Bármely halmaz hatványhalmazának mindig részhalmaza az üreshalmaz.
(15) Minden véges részbenredezett halmazban létezik minimális és maximális elem.
(16) Minden részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legkisebb elem és legfeljebb egy legnagyobb elem van.
(17) A $\mathbb{Z}_{17}^*$ csoportban $\overline{13}^{-1} = \overline{4}$.
(18) Tetszőleges A, B ítéletekre, A, B konjukciója pontosan akkor hamis, ha mindkét ítélet logikai értéke hamis.
(19) Egy permutáció akkor és csak akkor páratlan, ha páronként idegen ciklusok szorzataként felírva páratlan sok páros hosszú ciklust tartalmaz.
(20) A $\mathbb{Z}_{29}^*$ csoportban $\overline{17}^{-1}$ páratlan (mint 0 és 28 közötti maradék).

3. Feladat. Igazak-e az alábbi állítások?

(1) Ha $f : A \to B$ leképezés, akkor $f^{-1} : B \to A$ is leképezés.
(2) Minden részbenrendezett halmazban legalább egy legkisebb elem és legalább egy legnagyobb elem van.
(3) A $\varrho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ reláció szimmetrikus.
(4) A maradékosztályok $\mathbb{Z}_m$ halmaza osztályozása az egészek halmazának.
(5) Az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció dichotom, ha bármely $a, b \in A$-ra $(a, b) \in \alpha$ és $(b, a) \in \alpha$.
(6) A $\mathbb{Z}_{17}^*$ csoportban $\overline{13}^{-1} = \overline{8}$.
(7) Egy páros és egy páratlan permutáció szorzata páratlan permutáció.
(8) Dichotóm relációk metszete is dichotóm.
(9) A $\mathbb{Z}_{29}^*$ csoportban $\overline{17}^{-1}$ páros (mint 0 és 28 közötti maradék).
(10) $|\mathbb{Z}| \neq |\mathcal{P}(\mathbb{Z})|$.
(11) Az S_8 csoportban $(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 7)(2\ 6)$ rendje 6.
(12) Tetszőleges A, B halmazokra, $A \setminus B$ elemei mindig B-n kívüli elemek.
(13) Egy permutáció akkor és csak akkor páratlan, ha páronként idegen ciklusok szorzataként felírva páratlan sok transzpozíciót tartalmaz.

(14) Minden szimmetrikus és tranzitív reláció reflexív.
(15) A 3-elemű halmazon 5 részbenrendezés van.
(16) Ha a π és τ permutációk idegenek, akkor $\pi\tau = \tau\pi$
(17) A reláció tranzitív, ha teljesül a következő, ha két pont között van kettő hosszú irányított séta, akkor van él is.
(18) Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A \times B| = nm$.
(19) Minden n pozitív egészre létezik olyan p prím, hogy $n < p \leq 2n$.
(20) Ha $f : A \to B$ leképezés, akkor minden $a \in A$ elemhez legalább egy $b \in B$ van, amelyre b az a képe az f leképezésnél.