

## Csoportok II

2014 március 7-8.

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/3; [F] II/2,3

## Definíció

A  $G$  csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.  
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab : a \in K, b \in L\}, \quad K^{-1} = \{a^{-1} : a \in K\}.$$

## Jelölés

$$aK := \{a\} K, \quad Ka := K \{a\}$$

## Állítás

*A komplexusok szorzása asszociatív művelet.*

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

## Tétel

*Egy  $H \subseteq G$  komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha*

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel. □

## Megjegyzés

Tetszőleges  $H$  részcsoportra  $HH \subseteq H = \{1\} H \subseteq HH$ , tehát  $HH = H$ , és hasonlóan  $H^{-1} = H$  is teljesül.

## Tétel

Legyen  $H \leq G$ , és definiáljunk a  $G$  halmazon egy  $\sim$  relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor  $\sim$  ekvivalenciareláció, és egy  $a \in G$  elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah : h \in H\}.$$

## Biz.

- ▶ reflexivitás:  $\forall a \in G : a^{-1}a \in H$
- ▶ szimmetria:  $\forall a, b \in G : a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- ▶ tranzitivitás:  $\forall a, b, c \in G : a^{-1}b \in H \text{ és } b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy  $b \in G$  elem akkor és csak akkor van benne az  $a \in G$  elem  $\sim$  szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff a^{-1}b \in H \\ &\iff \exists h \in H : a^{-1}b = h \\ &\iff \exists h \in H : b = ah. \quad \square \end{aligned}$$

## Definíció

Az  $aH$  halmazt az  $a$  elem  $H$  szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

## Tétel

*Egy  $H \leq G$  részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a  $G$  csoport egy osztályozását alkotják.*

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. □

## Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a  $Ha$  **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

## Megjegyzés

Abel-csoportok esetén a baloldali és jobboldali mellékosztályok megegyeznek ( $aH = Ha$ ). Nemkommutatív esetben is előfordulhat, hogy megegyeznek a baloldali és jobboldali mellékosztályok, de nem mindig van így.

## Példa

Határozzuk meg a  $H \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

►  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = [\bar{3}] = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ :

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{3}\}, \bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}, \bar{2} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}$$

$$\bar{3} + H = \{\bar{3}, \bar{0}\}, \bar{4} + H = \{\bar{4}, \bar{1}\}, \bar{5} + H = \{\bar{5}, \bar{2}\}$$

$$\bar{0} + H = \bar{3} + H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$\bar{1} + H = \bar{4} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$$

$$\bar{2} + H = \bar{5} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$ .

►  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = [\bar{2}] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ :

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \bar{2} + H = \bar{4} + H$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} = \bar{3} + H = \bar{5} + H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}$ .

## Példa

Határozzuk meg a  $H \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

►  $G = \mathbb{Z}_{12}^*$ ,  $H = [5] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ :

$$\bar{1} \cdot H = \{\bar{1}, \bar{5}\} = \bar{5} \cdot H$$

$$\bar{7} \cdot H = \{\bar{7}, \bar{11}\} = \bar{11} \cdot H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{1}, \bar{5}\}, \{\bar{7}, \bar{11}\}\}$ .

►  $G = \mathbb{Z}_{13}^*$ ,  $H = [5] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$ :

$$\bar{1} \cdot H = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\} = \bar{5} \cdot H = \bar{8} \cdot H = \bar{12} \cdot H$$

$$\bar{2} \cdot H = \{\bar{2}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{11}\} = \bar{10} \cdot H = \bar{3} \cdot H = \bar{11} \cdot H$$

$$\bar{4} \cdot H = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{9}\} = \bar{7} \cdot H = \bar{6} \cdot H = \bar{9} \cdot H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}, \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{10}, \bar{11}\}, \{\bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}\}\}$ .



## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, (23)\} \leq S_3$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$

$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$

$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$$

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$

$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$

$$H \cdot (12) = \{(12), (123)\} = H \cdot (123),$$

A jobboldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, (23)\}, \{(13), (132)\}, \{(12), (123)\}\}.$$

## Példa

Határozzuk meg a  $V \leq S_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol  $V$  a **Klein-csoport**:

$$V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

A baloldali és jobboldali mellékosztályok ebben az esetben egybeesnek:

$$\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

$$\{(12), (34), (1324), (1423)\},$$

$$\{(13), (24), (1234), (1432)\},$$

$$\{(14), (23), (1243), (1342)\},$$

$$\{(123), (134), (142), (243)\},$$

$$\{(132), (143), (124), (234)\}.$$

HF utánaszámolni.

## Példa

Határozzuk meg a  $H = [t] = \{\text{id}, t\} \leq D_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, t\} = t \cdot H,$$

$$f \cdot H = \{f, tf^3\} = tf^3 \cdot H$$

$$f^2 \cdot H = \{f^2, tf^2\} = tf^2 \cdot H$$

$$f^3 \cdot H = \{f^3, tf\} = tf \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, t\}, \{f, tf^3\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf\}\}.$$

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, t\} = H \cdot t,$$

$$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$

$$H \cdot f^2 = \{f^2, tf^2\} = H \cdot tf^2$$

$$H \cdot f^3 = \{f^3, tf^3\} = H \cdot tf^3.$$

A jobboldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, t\}, \{f, tf\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf^3\}\}.$$

## Példa

Határozzuk meg a  $H = [f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

$$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:  $\{\{\text{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$ .

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$

$$H \cdot t = \{t, tf^3, tf^2, tf\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3.$$

A jobboldali mellékosztályozás:  $\{\{\text{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z \text{ és } w \text{ argumentuma megegyezik.}$$

$z \in \mathbb{C}$  mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w = \arg z\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a  $[0, 2\pi)$  intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás:  $\{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$ , ahol  $F_\alpha$  az az origóból kiinduló nyílt félegyenes, amely  $\alpha$  szöget zár be a valós tengely pozitív felével.

## Példa

Határozzuk meg az  $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det(A^{-1}B) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

$$A \cdot SL_n(\mathbb{R}) = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

Tetszőleges  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  esetén legyen

$$D_\lambda = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}.$$

A baloldali mellékosztályozás:  $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ .

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det(AB^{-1}) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

Tehát a jobboldali mellékosztályozás megegyezik a baloldalival.

## Példa

Az  $\{1\} \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás:  $\{\{a\} : a \in G\}$ .

## Példa

A  $G \leq G$  részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás:  $\{G\}$ .

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/3; [F] II/7



## Definíció

A  $G$  véges csoport  $H$  részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát  $H$  **indexének** nevezzük. Jelölése:  $[G : H]$ .

## Tétel (Lagrange tétele)

*Tetszőleges  $G$  véges csoport és  $H \leq G$  részcsoport esetén*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely  $a \in G$  esetén

$$\lambda_a: H \rightarrow aH, x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát  $|aH| = |H|$ .

A  $H$  szerinti baloldali mellékosztályozás a  $G$  halmazt  $[G : H]$  darab  $|H|$ -elemű osztályra osztja, így  $|G| = |H| \cdot [G : H]$ . □

## Következmény

*Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.*

**Biz.**

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

## Következmény

*Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.*

**Biz.**

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.

Csak azt kell észrevenni, hogy  $o(a) = |[a]|$ . □

## Következmény

*Ha  $G$  egy  $n$ -elemű csoport, akkor minden  $a \in G$  elemre  $a^n = 1$ .*

**Biz.**

Legyen  $|G| = n = o(a) \cdot \ell$  (itt  $\ell$  nem más, mint a  $[a]$  részcsoport indexe).

Ekkor  $a^n = a^{o(a) \cdot \ell} = (a^{o(a)})^\ell = 1^\ell = 1$ . □

## Következmény

*Ha  $G$  egy  $n$ -elemű csoport, akkor minden  $a \in G$  elemre  $a^{-1} = a^{n-1}$ .*

## Következmény

*Minden prímmrendű csoport ciklikus.*

**Biz.**

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha  $|G| = p$  prímszám, akkor minden  $a \in G$  elemre  $o(a) \in \{1, p\}$ .

Ha  $a \neq 1$ , akkor  $o(a) = p$ , és így  $\langle a \rangle = G$ . □

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű:  $\{1\}$ ;
2. kételemű:  $\mathbb{Z}_2$ ;
3. háromelemű:  $\mathbb{Z}_3$ ;
4. négyelemű:  $\mathbb{Z}_4, V$ ;
5. ötelemű:  $\mathbb{Z}_5$ ;
6. hatelemű:  $\mathbb{Z}_6; D_3 \cong S_3$ ;
7. hételemű:  $\mathbb{Z}_7$ .

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- ▶  $[1] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$
- ▶  $[2] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶  $[3] = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$
- ▶  $[4] = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$
- ▶  $[5] = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{8}, \bar{1}, \bar{6}, \bar{11}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{2}, \bar{7}\}$
- ▶  $[6] = \{\bar{0}, \bar{6}\}$
- ▶  $[7] = \{\bar{0}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{8}, \bar{3}, \bar{10}, \bar{5}\}$
- ▶  $[8] = \{\bar{0}, \bar{8}, \bar{4}\}$
- ▶  $[9] = \{\bar{0}, \bar{9}, \bar{6}, \bar{3}\}$
- ▶  $[10] = \{\bar{0}, \bar{10}, \bar{8}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{2}\}$
- ▶  $[11] = \{\bar{0}, \bar{11}, \bar{10}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

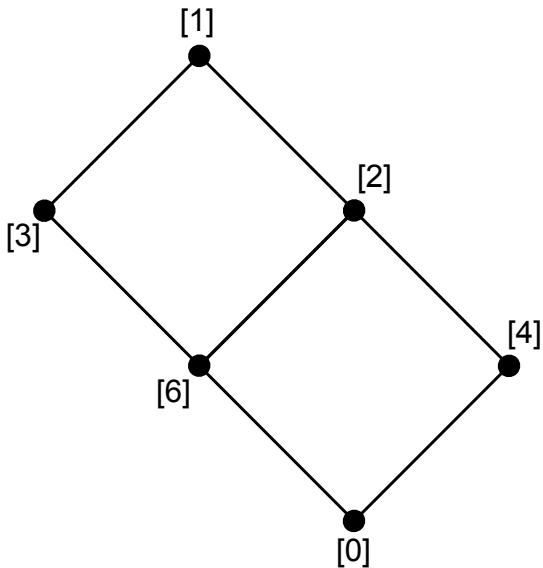
Minden részcsoport ciklikus:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\} = [\bar{5}] = [\bar{7}] = [\bar{11}]$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} = [\bar{10}]$
- ▶  $[\bar{3}] = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = [\bar{9}]$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} = [\bar{8}]$
- ▶  $[\bar{6}] = \{\bar{0}, \bar{6}\}$
- ▶  $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

$$D_4 = \{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- ▶  $[t] = \{\text{id}, t\}$
- ▶  $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- ▶  $[tf^2] = \{\text{id}, tf^2\}$
- ▶  $[tf^3] = \{\text{id}, tf^3\}$
- ▶  $[f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = [f^3]$
- ▶  $[f^2] = \{\text{id}, f^2\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

$$D_4 = \{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- ▶  $[t] = \{\text{id}, t\}$
- ▶  $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- ▶  $[tf^2] = \{\text{id}, tf^2\}$
- ▶  $[tf^3] = \{\text{id}, tf^3\}$
- ▶  $[f^2] = \{\text{id}, f^2\}$
- ▶  $[f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = [f^3]$

További részcsoportok:

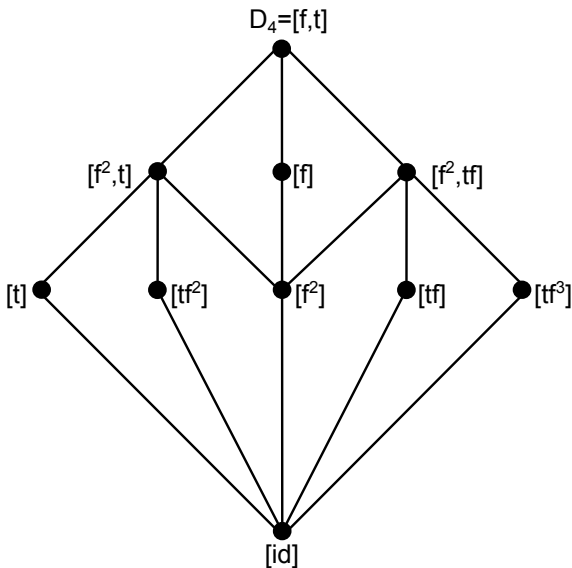
- ▶  $[f^2, t] = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} = [f^2, tf^2] = [t, tf^2] \cong V$
- ▶  $[f^2, tf] = \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} = [f^2, tf^3] = [tf, tf^3] \cong V$
- ▶  $[f, t] = D_4$



## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoportját.

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{20}\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{16}, \bar{11}\} = [\bar{11}]$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{16}\} = [\bar{16}]$
- ▶  $[\bar{5}] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{20}, \bar{16}, \bar{17}\} = [\bar{17}]$
- ▶  $[\bar{8}] = \{\bar{1}, \bar{8}\}$
- ▶  $[\bar{10}] = \{\bar{1}, \bar{10}, \bar{16}, \bar{13}, \bar{4}, \bar{19}\} = [\bar{19}]$
- ▶  $[\bar{13}] = \{\bar{1}, \bar{13}\}$
- ▶  $[\bar{20}] = \{\bar{1}, \bar{20}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoportját.

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{20}\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{1}\}$
- ▶  $[-\bar{1}] = \{\bar{1}, -\bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{8}] = \{\bar{1}, \bar{8}\}$
- ▶  $[-\bar{8}] = \{\bar{1}, -\bar{8}\}$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{1}, \bar{4}, -\bar{5}\}$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, -\bar{5}, \bar{8}, -\bar{10}\}$
- ▶  $[-\bar{2}] = \{\bar{1}, -\bar{2}, \bar{4}, -\bar{5}, -\bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶  $[-\bar{4}] = \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{4}, -\bar{4}, \bar{5}, -\bar{5}\}$

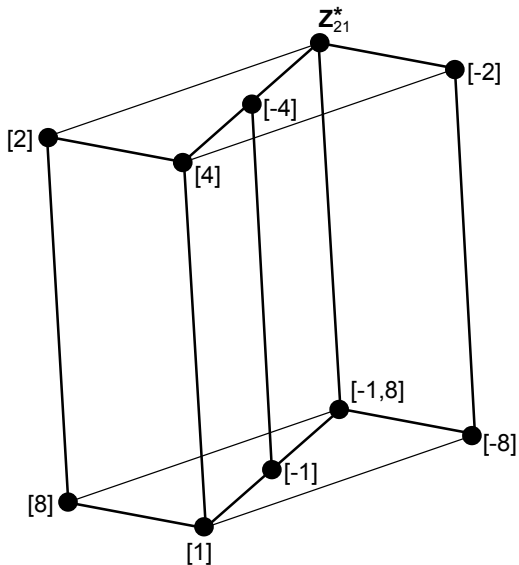
További részcsoportok:

- ▶  $[-\bar{1}, \bar{8}] = \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{8}, -\bar{8}\} \cong V$
- ▶  $\mathbb{Z}_{21}^*$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoporthját.

A részcsoportháló:



1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfizmatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] X/3; [F] I/7

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>

Bármely két szín szorzata jóldefiniált:

$$\blacksquare * \blacksquare = \blacksquare, \quad \blacksquare * \blacksquare = \blacksquare, \quad \blacksquare * \blacksquare = \blacksquare, \quad \blacksquare * \blacksquare = \blacksquare.$$

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>

A megfelelő *faktorgrupoid*:

*	■	■
■	■	■
■	■	■

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$c$	$b$	$c$	$c$	$e$
$b$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$
$c$	$a$	$e$	$c$	$c$	$e$
$d$	$a$	$d$	$c$	$d$	$d$
$e$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$

A megfelelő *faktorgrupoid*:

$$\mathbb{G}/\sim =$$

*	$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c, d, e\}$	$\{a\}$	$\{b, c, d, e\}$



## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>

A megfelelő *faktorgrupoid*:

$$\mathbb{G}/\sim = \begin{array}{c|cc} * & A & B \\ \hline A & B & B \\ B & A & B \end{array}, \quad \text{ahol } A = \{a\} \text{ és } B = \{b, c, d, e\}$$

Pl.  $B * B = \overline{b} * \overline{b} = \overline{b * b} = \overline{c} = B.$

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A megfelelő *faktorgrupoid*:

*	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■
■	■	■	■

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A megfelelő *faktorgrupoid*:

$$\mathbb{G}/\sim =$$

*	{a, c}	{b, e}	{d}
{a, c}	{a, c}	{b, e}	{a, c}
{b, e}	{a, c}	{a, c}	{b, e}
{d}	{a, c}	{d}	{d}

## Példa

A  $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$  osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} =$$

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>

A megfelelő *faktorgrupoid*:

$$\mathbb{G}/\sim =$$

*	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>D</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>D</i>

, ahol  $A = \{a, c\}$ ,  $B = \{b, e\}$  és  $D = \{d\}$

## Példa

Kompatibilis-e a  $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$  osztályozás az alábbi művelettel?

$$\mathbb{G} =$$

*	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>c</i>

Nem, pl.  $a \sim b$  és  $c \sim d$ , de  $a * c \not\approx b * d$   
(azaz  $\blacksquare * \blacksquare$  nem jóldefiniált).

## Definíció

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  egy grupoid, és legyen  $\mathcal{C}$  egy osztályozás az  $A$  halmazon.

Azt mondjuk, hogy  $\mathcal{C}$  **kompatibilis osztályozása** az  $\mathbb{A}$  grupoidnak, ha tetszőleges  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  osztályokhoz létezik egy olyan  $D \in \mathcal{C}$  osztály, amelyre

$$\{ a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1, a_2 \in C_2 \} \subseteq D.$$

## Definíció

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  egy grupoid, és legyen  $\sim$  egy ekvivalenciareláció az  $A$  halmazon.

Azt mondjuk, hogy  $\sim$  **kongruenciarelációja** az  $\mathbb{A}$  grupoidnak, ha tetszőleges  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$  elemek esetén

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \sim b_1 \\ a_2 \sim b_2 \end{array} \right\} \implies a_1 * a_2 \sim b_1 * b_2.$$

## Állítás

*Egy ekvivalenciareláció akkor és csak akkor kongruencia, ha a hozzá tartozó osztályozás kompatibilis.*

## Definíció

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  egy grupoid, legyen  $\sim$  egy kongruenciarelációja  $\mathbb{A}$ -nak, és legyen  $\mathcal{C} = A/\sim$  a megfelelő kompatibilis osztályozás. Értelmezzük a kongruenciaosztályok halmazán a  $*$  műveletet a következőképpen: tetszőleges  $C_1, C_2 \in A/\sim$  esetén legyen  $C_1 * C_2$  az az egyértelműen meghatározott  $D \in A/\sim$  kongruenciaosztály, amelyre

$$\{ a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1, a_2 \in C_2 \} \subseteq D.$$

Az így kapott  $\mathbb{A}/\sim = (A/\sim; *)$  grupoidot nevezzük az  $\mathbb{A}$  algebra  $\sim$  kongruencia szerinti **faktorgrupoidjának**.

## Megjegyzés

Általában  $\bar{a}$  jelöli az  $a \in A$  elem  $\sim$  szerinti ekvivalenciaosztályát. Ezzel a jelöléssel a faktorgrupoid művelete így definiálható:

$$\bar{a}_1 * \bar{a}_2 = \overline{a_1 * a_2}.$$

Az osztályozás kompatibilitása garantálja, hogy ez a művelet jóldefiniált, azaz az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/4; [F] II/8,9



## Tétel

Tetszőleges  $H \leq G$  részcsoportha az alábbiak ekvivalensek:

- (1)  $a$   $H$  szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik  $a$   $H$  szerinti jobboldali mellékosztályozással;
- (2)  $Hg = gH$  minden  $g \in G$  elemre;
- (3)  $g^{-1}Hg = H$  minden  $g \in G$  elemre;
- (4)  $g^{-1}Hg \subseteq H$  minden  $g \in G$  elemre.

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.1. Tétel. □

## Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszónak** nevezzük. Jelölés:  $H \triangleleft G$ .

## Példa

- ▶ Minden  $G$  csoportra  $\{1\} \triangleleft G$  és  $G \triangleleft G$ . Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy  $G$  **egyszerű** csoport.
- ▶ Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- ▶ Lásd a korábbi példákat.
- ▶ Minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

## Tétel

Bármely legalább kételemű  $G$  csoport esetén az alábbiak ekvivalensek:

- (1)  $G$  egyszerű Abel-csoport.
- (2)  $G$ -nek csak két részcsoporthja van:  $\{1\}$  és  $G$ .
- (3)  $G$  prímszámú ciklikus csoport (azaz  $G \cong \mathbb{Z}_p$  valamely  $p$  prímszámra).

## Biz.

(1)  $\implies$  (2): Világos.

(2)  $\implies$  (3): Tetszőleges  $1 \neq g \in G$  esetén  $[g] = G$ , tehát  $G$  ciklikus.

Ha  $G$  végtelen, akkor  $G \cong \mathbb{Z}$ , de ennek vannak nemtriviális valódi részcsoporthjai.

Ha  $G$  véges, akkor  $G \cong \mathbb{Z}_n$  valamely  $n \geq 2$  természetes számra. A  $\mathbb{Z}_n$  csoportnak annyi részcsoporthja van, ahány osztója  $n$ -nek, ezért  $n$  csak prím lehet.

(3)  $\implies$  (1): Világos.



## Tétel

Ha  $N \triangleleft G$ , akkor az  $N$  szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása  $G$ -nek.

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.

Igaz-e, hogy tetszőleges  $aN, bN$  mellékosztályokhoz létezik egy  $cN$  mellékosztály, amelyre  $aN \cdot bN \subseteq cN$ ? Igen, és pedig  $c = ab$  jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN.$$



## Megjegyzés

Mivel  $NN = N$ , valójában nem csak  $aNbN \subseteq abN$ , hanem  $aNbN = abN$  is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexusszorzással. (Grupoidokra általában ez nem igaz.)

## Tétel

Ha  $N \triangleleft G$ , akkor az  $N$  szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktorgrupoid csoport. Ezt a  $G$  csoport  $N$  normálosztója szerinti **faktorcsoportjának** nevezzük és  $G/N$ -nel jelöljük.

## Biz.

[F] II. fejezet, 2.18. Tétel.

A faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexusszorzással, amiről tudjuk, hogy asszociatív.

A  $G/N$  faktorcsoport egységeleme maga  $N$ :

$$\forall aN \in G/N : aN \cdot N = a \cdot NN = aN \text{ és } N \cdot aN = N \cdot Na = NN \cdot a = Na = aN.$$

Az  $aN \in G/N$  mellékosztály inverze  $a^{-1}N$ :

$$aN \cdot a^{-1}N = Naa^{-1}N = NN = N \text{ és } a^{-1}N \cdot aN = Na^{-1}aN = NN = N.$$



## Tétel

Ha  $\sim$  kongruenciája a  $G$  csoportnak, akkor  $N := \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$ , és  $a \sim$  kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az  $N$  normálosztó szerinti mellékosztályozás.

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Állítás + 4.8/(2) Tétel.

- ▶  $N$  zárt a szorzásra:

$$a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$$

- ▶  $N$  tartalmazza az egységelemet:  $1 \sim 1 \implies 1 \in N$

- ▶  $N$  zárt az inverzképzésre:

$$a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$$

- ▶  $N$  normálosztó: ha  $g \in G$  és  $n \in N$ , akkor

$$\left. \begin{array}{l} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array} \right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

- ▶ osztályozások megegyezése:

$$a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N \iff aN = bN. \quad \square$$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{0}, \bar{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} \\ \hline \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} \\ \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_6/N \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \{\bar{0}, \bar{3}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{4}\} \mapsto \hat{1}, \quad \{\bar{2}, \bar{5}\} \mapsto \hat{2}$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{ \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|cc} + & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \hline \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_6/N \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \mapsto \hat{1}$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$  részcsoporthoz tartozó faktorcsoporthot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \{\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}, \{\bar{2}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{11}\}, \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{9}\}\} = \{\bar{1} \cdot N, \bar{2} \cdot N, \bar{4} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N \\ \hline \bar{1} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N \\ \bar{2} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N & \bar{1} \cdot N \\ \bar{4} \cdot N & \bar{4} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_{13}^*/N \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \bar{1} \cdot N \mapsto \hat{0}, \bar{2} \cdot N \mapsto \hat{1}, \bar{4} \cdot N \mapsto \hat{2}$



## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{1}, \bar{5}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{12}^*$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\bar{1}, \bar{5}\}, \{\bar{7}, \bar{11}\}\} = \{\bar{1} \cdot N, \bar{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \bar{1} \cdot N & \bar{7} \cdot N \\ \hline \bar{1} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{7} \cdot N \\ \bar{7} \cdot N & \bar{7} \cdot N & \bar{1} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_{12}^*/N \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \bar{1} \cdot N \mapsto \hat{0}, \quad \bar{7} \cdot N \mapsto \hat{1}$

## Példa

Határozzuk meg a  $V \triangleleft S_4$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong ?$$

$$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6 \text{ vagy } S_4/V \cong S_3$$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$$(12)V \cdot (13)V = (123)V, \quad (13)V \cdot (12)V = (132)V \text{ és}$$

$$(123)(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)V \neq (132)V,$$

tehát  $S_4/V$  nem kommutatív, így  $S_4/V \cong S_3$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $N = [f] \triangleleft D_4$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \cong \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: D_4/N \rightarrow \{\pm 1\}$ ,  $\{\text{forg.}\} \mapsto 1$ ,  $\{\text{tükr.}\} \mapsto -1$

## Példa

Határozzuk meg az  $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Legyen  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ; ekkor  $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$ .

Izomorfizmus:  $\varphi: (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (T; \cdot)$ ,  $F_\alpha \mapsto \text{cis}(\alpha)$

- ▶  $\varphi$  bijektív: világos
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel:

$$(F_\alpha \cdot F_\beta)\varphi = F_{\alpha+\beta}\varphi = \text{cis}(\alpha + \beta) = \text{cis}(\alpha) \cdot \text{cis}(\beta) = F_\alpha\varphi \cdot F_\beta\varphi$$

## Példa

Határozzuk meg az  $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus:  $\varphi: GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $D_\lambda \mapsto \lambda$

- ▶  $\varphi$  bijektív: világos
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel:

$$(D_\lambda \cdot D_\mu) \varphi = D_{\lambda \cdot \mu} \varphi = \lambda \cdot \mu = D_\lambda \varphi \cdot D_\mu \varphi$$

## Példa

Határozzuk meg az  $\{1\} \triangleleft G$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus:  $\varphi: G/\{1\} \rightarrow G, \quad \{a\} \mapsto a$

## Példa

Határozzuk meg a  $G \triangleleft G$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/G = \{G\} \cong \{1\}$$

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfizmatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/4,5; [F] II/8

## Definíció

- ▶ Az  $a \in G$  elem  $g$ -vel való **konjugáltján** a  $g^{-1}ag$  elemet értjük.
- ▶ Az  $\alpha_g: G \rightarrow G, x \mapsto g^{-1}xg$  leképezést  $g$ -vel való **konjugálásnak** nevezzük.
- ▶ Azt mondjuk, hogy  $a$  és  $b$  **konjugáltak**, ha létezik olyan  $g \in G$  elem, amelyre  $b = g^{-1}ag$ .

## Állítás

Minden  $g \in G$ -re  $\alpha_g: G \rightarrow G$  izomorfizmus (**belső automorfizmus**).

Biz.

[F] II/8. fejezet.



## Állítás

A konjugáltsági reláció ekvivalenciareláció; a megfelelő ekvivalenciaosztályokat **konjugáltosztályoknak** nevezzük.

Biz.

HF





## Állítás

- ▶ Egy  $N \leq G$  részcsoport pontosan akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra:  $\forall g \in G \forall n \in N : g^{-1}ng \in N$ .
- ▶ Normálosztók metszete normálosztó.
- ▶ Egy  $B \subseteq G$  halmazt tartalmazó legszűkebb normálosztó mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók  $B$  elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával. Ezt nevezzük a  $B$  halmaz által **generált normálosztónak**.

Biz.

HF



## Példa

- ▶ Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- ▶ Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- ▶ Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a  $GL_n(\mathbb{R})$  csoportban, ha az  $\mathbb{R}^n$  vektortér ugyanazon lineáris transzformációját adják meg (különböző bázisokban).

## Állítás

Két  $S_n$ -beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** (azaz minden  $\ell$ -re ugyanannyi  $\ell$  hosszúságú ciklust tartalmaznak).

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen  $\pi = (a_1 a_2 \dots a_k)(b_1 b_2 \dots b_l) \dots \in S_n$  és  $\sigma \in S_n$ . Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma a_2\sigma \dots a_k\sigma)(b_1\sigma b_2\sigma \dots b_l\sigma) \dots$$

Szorozzunk balról  $\sigma$ -val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma(a_1\sigma a_2\sigma \dots a_k\sigma)(b_1\sigma b_2\sigma \dots b_l\sigma) \dots$$

Egy tetszőleges  $a_i$  elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt  $a_{i\oplus 1}\sigma$ . (HF)



## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, (23)\} \leq S_3$  részcsoport által generált  $N$  normálosztót és az  $S_3/N$  faktorcsoportot.

A konjugáltak:  $\text{id}, (23), (12), (13)$ .

A konjugáltak által generált részcsoport:  $N = [(12), (13), (23)] = S_3$ .

A faktorcsoport:  $S_3/S_3 = \{S_3\} \cong \{1\}$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $S_4$  csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok:

- ▶  $\{\text{id}\}$  (1 db)
- ▶  $(\bullet \bullet)$  alakú permutációk (6 db)
- ▶  $(\bullet \bullet \bullet)$  alakú permutációk (8 db)
- ▶  $(\bullet \bullet \bullet \bullet)$  alakú permutációk (6 db)
- ▶  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$  alakú permutációk (3 db)

Ha  $N \triangleleft S_4$ , akkor egyrészt  $|N|$  a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt  $|N|$  osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- ▶  $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\};$
- ▶  $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V;$
- ▶  $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), \dots, (123), \dots\} = A_4;$
- ▶  $|N| = 24, \quad N = S_4.$

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.  
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, t\} \leq D_4$  részcsoport által generált  $N$  normálosztót és a  $D_4/N$  faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{lll} \text{id}^{-1} \cdot t \cdot \text{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\ f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\ f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & (tf^2)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\ f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & (tf^3)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2 \end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:

$$N = [t, tf^2] = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V.$$

A faktorcsoport:  $D_4/N = \{\{\text{id}, f^2, t, tf^2\}, \{f, f^3, tf, tf^3\}\} \cong \mathbb{Z}_2$ .

## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok:  $\{\text{id}\}$ ,  $\{f^2\}$ ,  $\{f, f^3\}$ ,  $\{t, tf^2\}$ ,  $\{tf, tf^3\}$ .

Ha  $N \triangleleft D_4$ , akkor  $N$  a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ( $\{\text{id}\}$  mindenképpen szerepel), másrészt  $|N|$  osztója 8-nak.

A következő lehetőségek vannak:

- ▶  $|N| = 1$ ,  $N = \{\text{id}\}$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 = 2$ ,  $N = \{\text{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong V$ ;
- ▶  $|N| = 8$ ,  $N = D_4$ .

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.  
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Rajzoljuk fel a normálosztóhálót!

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfizmatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat








[Sz] XII/4; [F] II/9,10

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

izomorf csoportok

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\otimes$		
		
		



Az  $\mathbb{A} = (\{\bar{0}, \bar{1}\}; +)$  és a  $\mathbb{B} = (\{\text{tulipán}, \text{lili} \}; \otimes)$  csoportok szerkezete ugyanaz: ha  $\mathbb{A}$  műveletábrázatában

minden  $\bar{0}$ -t átnevezünk tulipán-ra, és minden  $\bar{1}$ -t átnevezünk lili-ra, akkor éppen  $\mathbb{B}$  műveletábrázatát kapjuk:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	átnevezés $\longrightarrow$	$\otimes$		
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$				
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$				

Ezt az „átnevezést” a

$$\varphi: \{\bar{0}, \bar{1}\} \rightarrow \{\text{tulipán}, \text{lili}\}, \quad \bar{0} \mapsto \text{tulipán}, \quad \bar{1} \mapsto \text{lili}$$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$$\forall a_1, a_2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}: (a_1 + a_2)\varphi = (a_1\varphi) \otimes (a_2\varphi).$$

## Definíció

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két grupoid. Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **homomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 * a_2)\varphi = a_1\varphi \oplus a_2\varphi.$$

Ha létezik  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  szürjektív homomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{B}$  **homomorf képe**  $\mathbb{A}$ -nak.

Speciális homomorfizmusok:

- ▶ bijektív homomorfizmus = **izomorfizmus**,
- ▶ injektív homomorfizmus = **beágyazás**,
- ▶  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  homomorfizmus = **endomorfizmus**,
- ▶ bijektív  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  homomorfizmus = **automorfizmus**.

## Példa

- ▶  $\varphi: (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$ ,  $x \mapsto \log x$  izomorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +)$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  automorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot)$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  automorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +)$ ,  $z \mapsto \operatorname{Re} z$  endomorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$ ,  $z \mapsto \operatorname{Re} z$  szürjektív homomorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot)$ ,  $z \mapsto \operatorname{Re} z$  nem homomorfizmus
- ▶  $\varphi: (\mathbb{R}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot)$ ,  $x \mapsto x$  beágyazás
- ▶  $\varphi: (\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot)$ ,  $M \mapsto \det M$  szürjektív homomorfizmus
- ▶  $\varphi: (C[0, 1]; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$ ,  $f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$  szürjektív homomorfizmus

## Tétel

*Ha  $\varphi: G \rightarrow H$  csoporthomomorfizmus, akkor  $1_G\varphi = 1_H$  és  $g^{-1}\varphi = (g\varphi)^{-1}$  minden  $g \in G$ -re.*

## Biz.

HF [Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel. □

## Tétel

*Ha  $\varphi: G \rightarrow H$  csoporthomomorfizmus, akkor  $G\varphi$  részcsoportha  $H$ -nak.*

## Biz.

A  $G\varphi = \{g\varphi: g \in G\} \subseteq H$  halmaz zárt a szorzásra:

$$\forall a, b \in G : a\varphi \cdot b\varphi = (ab)\varphi \in G\varphi.$$

A fenti tételből következik, hogy  $G\varphi$  tartalmazza  $H$  egységelemét és zárt az inverzképzésre is. □

## Következmény

*Csoport homomorf képe csoport.*

## Tétel

*Homomorfizmusok szorzata homomorfizmus, izomorfizmusok szorzata izomorfizmus, izomorfizmus inverze izomorfizmus.*

## Biz.

HF [Sz] X. fejezet, 1.13.és 1.14. Tétel. □

## Definíció

Legyen  $N$  normálosztója a  $G$  csoportnak. Ekkor a

$$\nu: G \rightarrow G/N, a \mapsto aN$$

leképezés szürjektív homomorfizmus (HF), amelyet az  $N$  normálosztóhoz tartozó **természetes homomorfizmusnak** nevezünk.

A természetes homomorfizmus mutatja, hogy minden faktorcsoport előáll homomorf képként. Ennek a fordítottja is igaz: minden homomorf kép faktorcsoport (legalábbis izomorfia erejéig).

## Definíció

A  $\varphi: G \rightarrow H$  csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker \varphi := \{g \in G : g\varphi = 1\}.$$

## Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha  $\varphi: G \rightarrow H$  csoporthomomorfizmus, akkor  $\ker \varphi \triangleleft G$  és

$$G/\ker \varphi \cong G\varphi \leq H.$$

## Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha  $\varphi: G \rightarrow H$  csoporthomomorfizmus, akkor  $\ker \varphi \triangleleft G$  és

$$G / \ker \varphi \cong G\varphi \leq H.$$

**Biz.**

Legyen  $N = \ker \varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\}$ . Először ellenőrizzük, hogy  $N$  valóban normálosztó.

- ▶ Zárt a szorzásra:

$$a\varphi = b\varphi = 1 \implies (ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = 1 \cdot 1 = 1.$$

- ▶ Tartalmazza az egységelemet:

$$1\varphi = 1.$$

- ▶ Zárt az inverzképzésre:

$$a\varphi = 1 \implies (a^{-1})\varphi = (a\varphi)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

- ▶ Zárt a konjugálásra:

$$a\varphi = 1 \implies (g^{-1}ag)\varphi = g^{-1}\varphi \cdot a\varphi \cdot g\varphi = (g\varphi)^{-1} \cdot 1 \cdot g\varphi = 1.$$

Biz. (folyt.)

Megmutatjuk, hogy  $\forall a, b \in G : a\varphi = b\varphi \iff aN = bN :$

$$a\varphi = b\varphi \iff 1 = a\varphi \cdot (b\varphi)^{-1} = a\varphi \cdot b^{-1}\varphi = (ab^{-1})\varphi$$

$$\iff ab^{-1} \in N$$

$$\iff aN = bN.$$

Tehát a  $\psi: G/N \rightarrow G\varphi$ ,  $aN \mapsto a\varphi$  leképezés egy jóldefiniált bijekció.

Igazoljuk, hogy  $\psi$  homomorfizmus: tetszőleges  $aN, bN \in G/N$  mellékosztályokra

$$(aN \cdot bN)\psi = (abN)\psi = (ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = (aN)\psi \cdot (bN)\psi.$$



## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3, \bar{k} \mapsto \hat{k}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

▶  $\varphi$  jóldefiniált:  $k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \implies k_1 \equiv k_2 \pmod{3}$

▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1 + k_2}) \varphi = \overline{k_1 + k_2} \varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \hat{k}_1 + \hat{k}_2 = \overline{k_1} \varphi + \overline{k_2} \varphi$$

▶ mag:  $\ker \varphi = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: \hat{k} = \hat{0}\} = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 3 \mid k\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$

▶ értékkészlet:  $\mathbb{Z}_6 \varphi = \{\hat{k}: \bar{k} \in \mathbb{Z}_6\} = \mathbb{Z}_3$

▶ izomorfizmus:

$$\psi: \mathbb{Z}_6 / \{\bar{0}, \bar{3}\} \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \{\bar{0}, \bar{3}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{4}\} \mapsto \hat{1}, \quad \{\bar{2}, \bar{5}\} \mapsto \hat{2}$$



## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \bar{k} \mapsto 5\hat{k}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

▶  $\varphi$  jóldefiniált:  $k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$

▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1 + k_2}) \varphi = \overline{k_1 + k_2} \varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\hat{k}_1 + 5\hat{k}_2 = \overline{k_1} \varphi + \overline{k_2} \varphi$$

▶ mag:

$$\ker \varphi = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 5\hat{k} = \hat{0}\} = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 10 \mid 5k\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$$

▶ értékkészlet:  $\mathbb{Z}_6 \varphi = \{5\hat{k}: \bar{k} \in \mathbb{Z}_6\} = \{\hat{0}, \hat{5}\} \leq \mathbb{Z}_{10}$

▶ izomorfizmus:

$$\psi: \mathbb{Z}_6 / \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \quad \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \mapsto \hat{5}$$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfizmatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(z \cdot w)\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$$

- ▶ mag:  $\ker \varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{z \in \mathbb{C}^* : z = |z|\} = \mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$

- ▶ értékkészlet:  $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} : z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \leq \mathbb{C}^*$

- ▶ izomorfizmus:  $\psi: \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \rightarrow T$ ,  $F_\alpha \mapsto \text{cis}(\alpha)$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $A \mapsto \det(A)$  homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(A \cdot B) \varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$$

- ▶ mag:  $\ker \varphi = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} = \text{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \text{GL}_n(\mathbb{R})$
- ▶ értékkészlet:  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \varphi = \{\det(A) : A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$
- ▶ izomorfizmus:  $\psi: \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \text{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $D_\lambda \mapsto \lambda$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: G \rightarrow H, g \mapsto 1$  homomorfizmus (triviális homomorfizmus).

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:  $(g_1 \cdot g_2)\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- ▶ mag:  $\ker \varphi = \{g \in G: g\varphi = 1\} = G \triangleleft G$
- ▶ értékkészlet:  $G\varphi = \{g\varphi: g \in G\} = \{1\} \leq H$
- ▶ izomorfizmus:  $\psi: G/G \rightarrow \{1\}, \quad G \mapsto 1$

## Példa

Létezik-e **injektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_7 \rightarrow S_5$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$ . Ez lehetetlen, mert  $7 \nmid 120$  (Lagrange).

## Példa

Létezik-e **injektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_5$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$ . Ekkor  $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$ , ahol

$\pi \in S_5$  hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például  $\pi = (123)(45)$ ,

és ekkor  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_5$ ,  $\bar{k} \mapsto \pi^k$  valóban injektív homomorfizmus:

- ▶  $\varphi$  jóldefiniált és injektív:

$$\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$$

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1} + \overline{k_2})\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \pi^{k_1+k_2} = \pi^{k_1} \cdot \pi^{k_2} = \overline{k_1}\varphi \cdot \overline{k_2}\varphi$$

## Példa

Létezik-e **szürjektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_3$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_{24}/\ker \varphi \cong S_3$ . Ez lehetetlen, mert  $\mathbb{Z}_{24}$  Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

## Példa

Létezik-e **szürjektív**  $\varphi: D_4 \rightarrow V$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $D_4/\ker \varphi \cong V$ . Ekkor  $\ker \varphi$  kételemű normálosztó  $D_4$ -ben. Ilyen csak egy van:  $\{\text{id}, f^2\}$ , és valóban,  $D_4/\{\text{id}, f^2\} \cong V$  például az alábbi  $\psi$  izomorfizmus mellett:

$$\begin{aligned} \psi: D_4/\{\text{id}, f^2\} \rightarrow V, \quad & \{\text{id}, f^2\} \mapsto \text{id}, & \{f, f^3\} \mapsto (12)(34), \\ & \{t, tf^2\} \mapsto (13)(24), & \{tf, tf^3\} \mapsto (14)(23). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk a kívánt  $\varphi: D_4 \rightarrow V$  homomorfizmust:

$$\begin{aligned} \text{id} \varphi = \text{id}, \quad f \varphi = (12)(34), \quad t \varphi = (13)(24), \quad tf \varphi = (14)(23), \\ f^2 \varphi = \text{id}, \quad f^3 \varphi = (12)(34), \quad tf^2 \varphi = (13)(24), \quad tf^3 \varphi = (14)(23). \end{aligned}$$

## Példa

Adjunk meg egy **nemtriviális**  $\varphi: D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  homomorfizmust.

Mivel  $D_4/\ker \varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$ , a feladatunk találni egy izomorfizmust  $D_4$  valamelyik faktorcsoportja és  $\mathbb{Z}_4$  egy nemtriviális részcsoportja között.

$D_4$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $D_4/\{\text{id}\} \cong D_4$

(2)  $D_4/\{\text{id}, f^2\} \cong V$

(3)  $D_4/\{\text{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(4)  $D_4/\{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$

(5)  $D_4/\{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(6)  $D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_4$

(b)  $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(c)  $\{\bar{0}\} \cong \{1\}$

---

(3)  $\rightarrow$  (b):  $\{\text{id}, f, f^2, f^3\} \mapsto \bar{0}, \quad \{t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \bar{2}$

$$\text{id} \varphi = \bar{0} \quad f \varphi = \bar{0} \quad f^2 \varphi = \bar{0} \quad f^3 \varphi = \bar{0}$$

$$t \varphi = \bar{2} \quad tf \varphi = \bar{2} \quad tf^2 \varphi = \bar{2} \quad tf^3 \varphi = \bar{2}$$

## Példa

Adjunk meg egy **nemtriviális**  $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  homomorfizmust.

Mivel  $\mathbb{Z}_{15}/\ker \varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$ , a feladatunk találni egy izomorfizmust  $\mathbb{Z}_{15}$  valamelyik faktorcsoportja és  $\mathbb{Z}_6$  egy nemtriviális részcsoportja között.

$\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$

(2)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$

(3)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(4)  $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_6$

(b)  $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(c)  $\{\hat{0}, \hat{3}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(d)  $\{\hat{0}\} \cong \{1\}$

---

(3)  $\rightarrow$  (b):  $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \mapsto \hat{0}$ ,  $\{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13}\} \mapsto \hat{2}$ ,  $\{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14}\} \mapsto \hat{4}$

$$\bar{0}\varphi = \hat{0} \quad \bar{3}\varphi = \hat{0} \quad \bar{6}\varphi = \hat{0} \quad \bar{9}\varphi = \hat{0} \quad \bar{12}\varphi = \hat{0}$$

$$\bar{1}\varphi = \hat{2} \quad \bar{4}\varphi = \hat{2} \quad \bar{7}\varphi = \hat{2} \quad \bar{10}\varphi = \hat{2} \quad \bar{13}\varphi = \hat{2}$$

$$\bar{2}\varphi = \hat{4} \quad \bar{5}\varphi = \hat{4} \quad \bar{8}\varphi = \hat{4} \quad \bar{11}\varphi = \hat{4} \quad \bar{14}\varphi = \hat{4}$$



## Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha  $H \leq G$  és  $N \triangleleft G$ , akkor  $N \triangleleft HN \leq G$  és  $H \cap N \triangleleft H \leq G$ , továbbá

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

## Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a  $G = S_4$ ,  $H = S_3$ ,  $N = V$  szereposztással.

- ▶  $H \cap N = S_3 \cap V = \{\text{id}\}$
- ▶  $H/H \cap N = S_3/\{\text{id}\}$
- ▶  $HN = S_3V = S_4$
- ▶  $HN/N = S_4/V$
- ▶ izomorfia:  $S_4/V \cong S_3/\{\text{id}\} \cong S_3$

## Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha  $N \triangleleft G$ , akkor  $G/N$  részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a  $G$  csoport  $N$ -et tartalmazó részcsoportjainak. A  $K \leq G$  részcsoportnak (ahol  $N \leq K$ ) az  $F := K/N \leq G/N$  részcsoport felel meg.

## Tétel (II. izomorfiatétel)

Ha  $K \leq G$  és  $F \leq G/N$  a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoportok, akkor  $K \triangleleft G \iff F \triangleleft G/N$ . Ha ez teljesül, akkor  $(G/N)/F \cong G/K$ , azaz

$$(G/N)/(K/N) \cong G/K.$$

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/5; [F] II/12

## Definíció

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

## Tétel (Cayley-reprezentáció)

*Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.*

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő  $\rho$  leképezés beágyazza a  $G$  csoportot az  $S_G$  szimmetrikus csoportba:

$$\rho: G \rightarrow S_G, g \mapsto \rho_g.$$

- ▶ Minden  $g \in G$  esetén  $\rho_g \in S_G$  (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ▶  $\rho$  injektív:  $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ▶  $\rho$  homomorfizmus:  $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$   
 $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x(gh) = (xg)h = (xg)\rho_h = (x\rho_g)\rho_h = x(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen  $H = G\rho \leq S_G$ ; ekkor  $\rho$  izomorfizmus  $G$  és  $H$  között.



## Példa

Írjuk fel a  $\mathbb{Z}_6$  csoport Cayley-reprezentációját.

Minden  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$  esetén  $\rho_{\bar{a}}: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6, \bar{x} \mapsto \bar{x} + \bar{a}$ .

$$\rho_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\rho_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{2}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{2}\bar{4})(\bar{1}\bar{3}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{3})(\bar{1}\bar{4})(\bar{2}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{4}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{4}\bar{2})(\bar{1}\bar{5}\bar{3})$$

$$\rho_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{5}\bar{4}\bar{3}\bar{2}\bar{1})$$

## Példa

Írjuk fel az  $S_3$  csoport Cayley-reprezentációját.

Minden  $\pi \in S_3$  esetén  $\rho_\pi: S_3 \rightarrow S_3, x \mapsto x \cdot \pi$ .

$$\rho_{\text{id}} = \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(12)} &= \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \text{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix} \\ &= (\text{id} (12))((13) (132))((23) (123)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(123)} &= \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \text{id} \end{pmatrix} \\ &= (\text{id} (123) (132))((12) (13) (23)) \end{aligned}$$

⋮

## Tétel

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

## Biz.

[Sz] XII/5. fejezet.

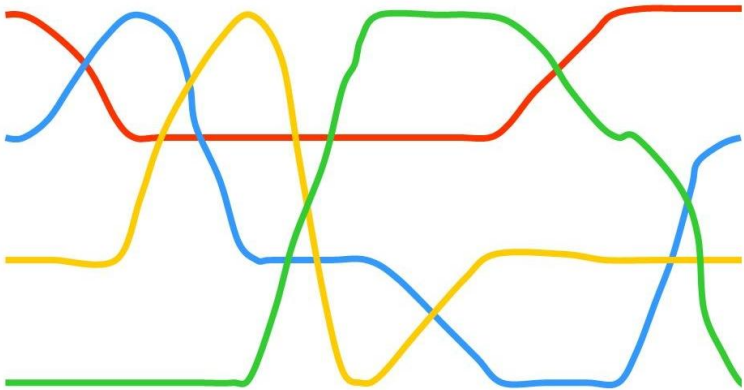
Tegyük fel, hogy

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2l},$$

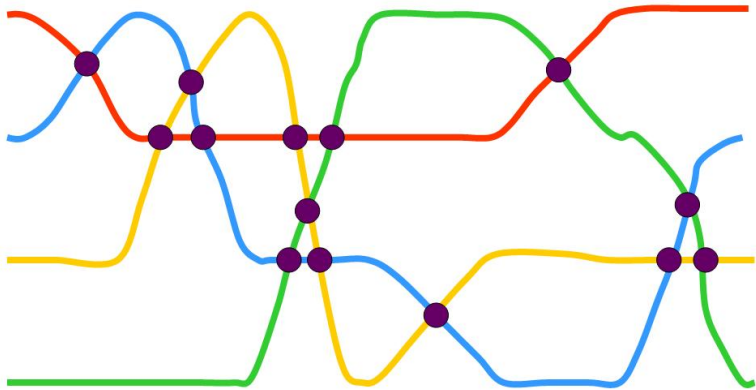
ahol mindegyik  $\tau_i$  és  $\sigma_j$  transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

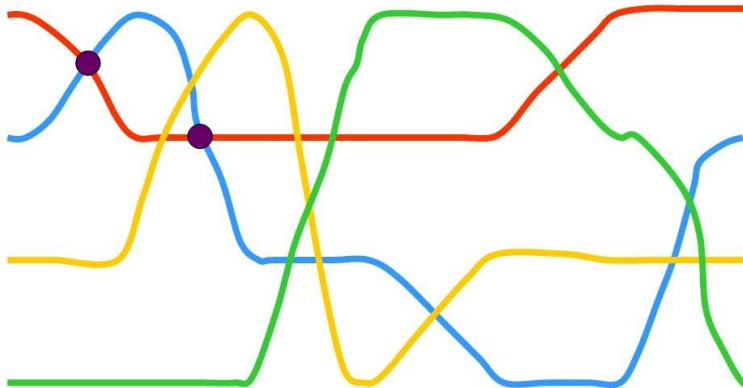
$$\text{id} = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} \sigma_{2l} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

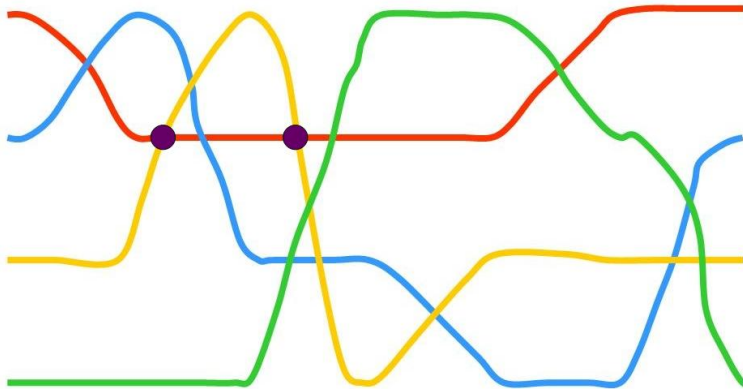




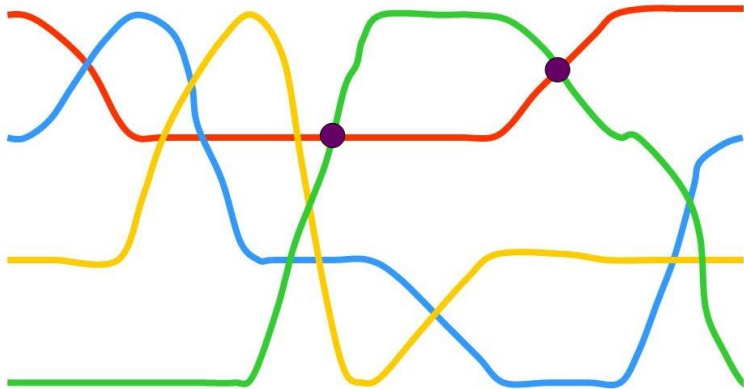




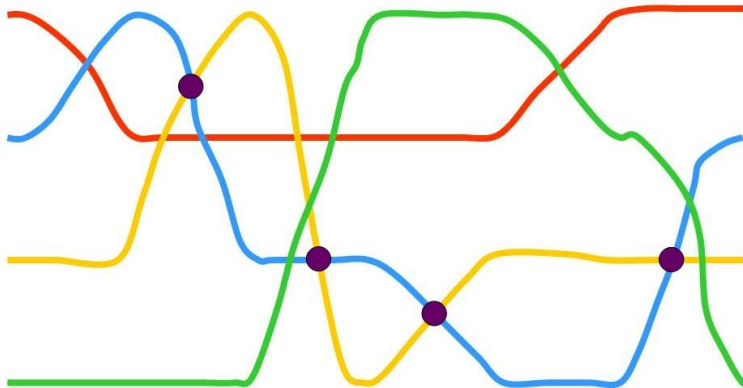
metszéspontok: 2



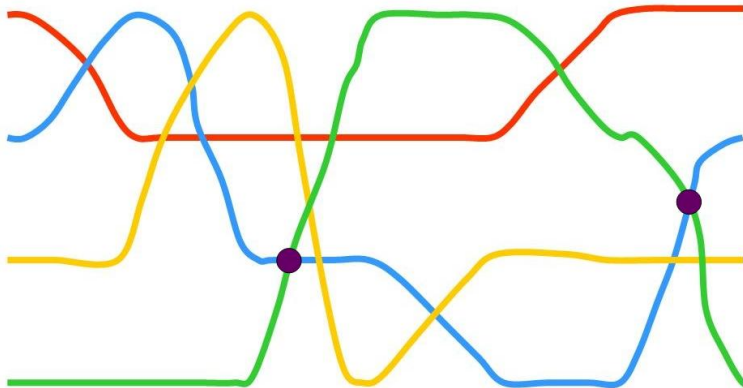
metszéspontok:  $2 + 2$



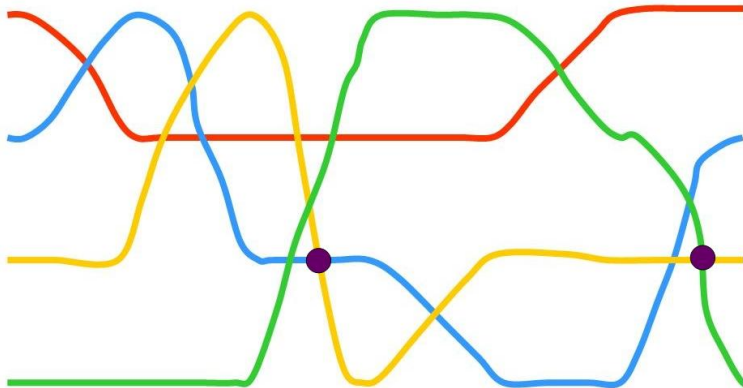
metszéspontok:  $2 + 2 + 2$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{2}$

—

—

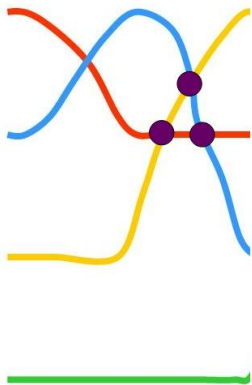
—

—

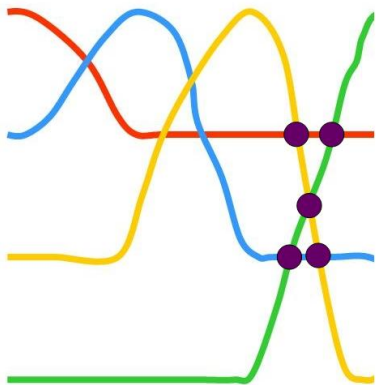




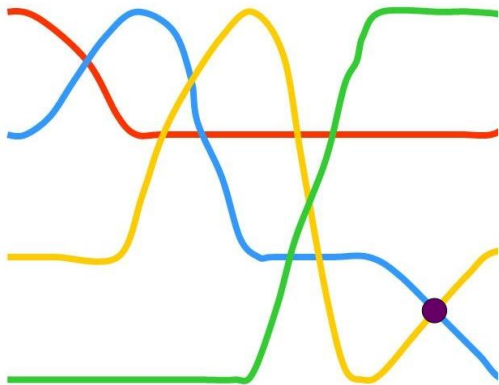
metszéspontok: 1



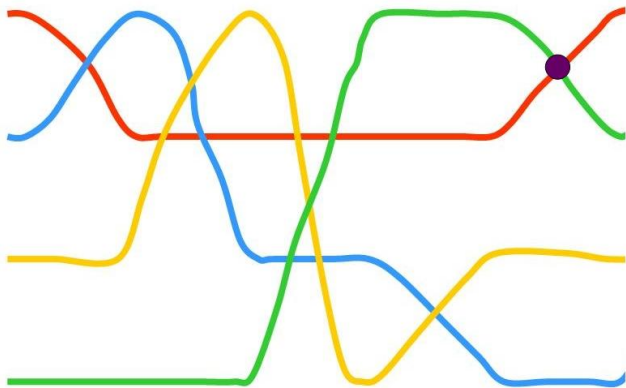
metszéspontok:  $1 + 3$



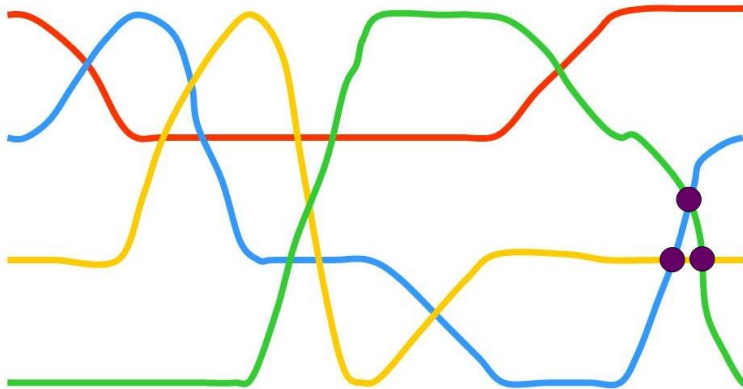
metszéspontok:  $1 + 3 + 5$



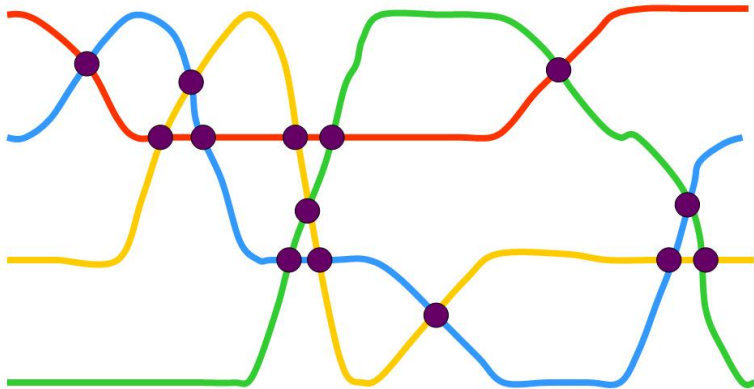
metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1$



metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1$



metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$  cserék száma (mod 2)



metszéspontok:  $0 \equiv \text{cserék száma} \pmod{2}$

## Állítás

*Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:*

$$\begin{array}{lclclcl} \text{páros} & \cdot & \text{páros} & = & \text{páros} & & \text{páros} & \cdot & \text{páratlan} & = & \text{páratlan} \\ \text{páratlan} & \cdot & \text{páratlan} & = & \text{páros} & & \text{páratlan} & \cdot & \text{páros} & = & \text{páratlan} \end{array}$$

## Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.



## Következmény

*A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.*

## Biz.

Láttuk korábban, hogy egy  $k$  hosszúságú ciklus felírható  $k - 1$  transzpozíció szorzataként.





## Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- ▶  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ : páros
- ▶  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ : páratlan
- ▶  $(123)(4567)$ : páratlan
- ▶  $(12)(3456)(78)$ : páratlan
- ▶  $(12)(345)(6789)$ : páros

## Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot  $n$ -edfokú **alternáló csoportnak** nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

**Biz.**

Értelmezzük egy  $\pi$  permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor  $\operatorname{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  homomorfizmus, és magja éppen  $A_n$ .




## Következmény

$[S_n : A_n] = 2$  és így  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ .

**Tétel**

Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

**Biz.**

$(ab)(ac) = (abc)$ ,  $(ab)(cd) = (ab)(ac) \cdot (ac)(cd) = (abc)(acd)$  

## Tétel

Ha  $n \geq 5$ , akkor  $A_n$  egyszerű csoport.

## Megjegyzés

Ha  $n = 4$ , akkor  $A_n$  nem egyszerű, mert  $V \triangleleft A_4$ . Az  $A_3, A_2$  csoportok persze egyszerűek, mert prímszámúak.

## Következmény

Ha  $n \neq 4$ , akkor  $S_n$  egyetlen nemtriviális normálisztója  $A_n$ .

## Biz.

Legyen  $N$  nemtriviális normálisztója  $S_n$ -nek ( $n \neq 4$ ).

Ekkor  $N \cap A_n \triangleleft A_n$ , így  $A_n$  egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- ▶  $N \cap A_n = A_n$  esetén  $A_n \leq N$ , ezért  $N = A_n$ .
- ▶  $N \cap A_n = \{\text{id}\}$  esetén  $|N| = 2$ , mert

$$N \cong N / \{\text{id}\} \cong N / N \cap A_n \cong NA_n / A_n = S_n / A_n.$$

Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor  $N \setminus \{\text{id}\}$  egyelemű konjugáltosztály lenne  $S_n$ -ben.



1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfizmatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] X/4; [F] II/13,14

## Definíció

Az  $A$  és  $B$  csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza  $A \times B$ , művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

## Állítás

*Csoportok külső direkt szorzata csoport.*

## Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem  $(1_A, 1_B)$ , az  $(a, b) \in A \times B$  elem inverze pedig  $(a^{-1}, b^{-1})$ .



## Példa

- ▶ Síkbeli vektorok az összeadás műveletével:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- ▶  $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}); \Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

## Állítás

Az  $A \times B$  külső direkt szorzatban az  $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$  és  $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$  részcsoporthokra teljesülnek a következők:

- (1)  $A_1, B_1 \triangleleft A \times B$ ;
- (2)  $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$ ;
- (3)  $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$ .

Biz.

[F] II/13. fejezet.



## Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $G$  csoport az  $A$  és  $B$  részcsoporthjainak **belső direkt szorzata**, ha

- (1)  $A, B \triangleleft G$ ;
- (2)  $A \vee B = AB = G$ ;
- (3)  $A \wedge B = A \cap B = \{1_G\}$ .

## Tétel

A  $G$  csoport az  $A$  és  $B$  részcsoporthainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

- (a)  $G$  minden eleme előáll  $ab$  ( $a \in A, b \in B$ ) alakban;
- (b) a fenti előállítás egyértelmű;
- (c)  $\forall a \in A \forall b \in B : ab = ba$ .

Biz.

[F] II/13. fejezet.



## Tétel

A külső és a belső direkt szorzat „lényegében” ugyanaz:

$$G \cong A \times_k B \iff \exists A_1, B_1 \leq G : A_1 \cong A, B_1 \cong B \text{ és } G = A_1 \times_b B_1.$$

Biz.

[F] II/13. fejezet.



## Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $G$  csoport az  $A_1, \dots, A_n$  részcsoporthainak **belső direkt szorzata**, ha

- (1)  $A_1, \dots, A_n \triangleleft G$ ;
- (2)  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = G$ ;
- (3)  $A_i \cap (A_1 \cdot \dots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \dots \cdot A_n) = \{1_G\}$  minden  $i$ -re.

## Tétel

*A  $G$  csoport az  $A_1, \dots, A_n$  részcsoporthainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha*

- $G$  minden eleme előáll  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  ( $a_i \in A_i$ ) alakban;*
- a fenti előállítás egyértelmű;*
- $\forall a_i \in A_i \forall a_j \in A_j : a_i a_j = a_j a_i$  minden  $i \neq j$  esetén.*



## Tétel

Ha  $n$  és  $m$  relatív prímek, akkor  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ .

## Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)



## Állítás

Ha  $n$  és  $m$  nem relatív prímek, akkor  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \not\cong \mathbb{Z}_{nm}$ .

## Biz.

Legyen  $d = \text{Inko}(n, m) > 1$ ; ekkor  $\text{lkkt}(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$ .

Tetszőleges  $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  elemre

$$\frac{nm}{d} (\bar{a}, \bar{b}) = \left( \frac{m}{d} \cdot n\bar{a}, \frac{n}{d} \cdot m\bar{b} \right) = (\bar{0}, \bar{0}),$$

ezért  $(\bar{a}, \bar{b})$  rendje legfeljebb  $\text{lkkt}(n, m)$ .

Tehát  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  nem tartalmaz  $nm$ -ed rendű elemet, így nem is ciklikus.



## Következmény

Ha  $n$  prímszámhatványtényezős felbontása  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}} \cong \dots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$



## Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

*Minden véges Abel-csoport felbontható prímszámú ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.*

### Példa

Határozzuk meg az összes  $n$ -elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- ▶  $n = 4$ :  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 8$ :  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 10$ :  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  (izomorf  $\mathbb{Z}_{10}$ -zel)
- ▶  $n = 16$ :  $\mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 100$ :  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$ ?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ ?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitás része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ -ben van negyedrendű elem, például  $(\bar{0}, \bar{3})$ , míg  $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$ -ban nincs negyedrendű elem (miért?).

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ?

Nem, mert  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$ , de  $\mathbb{Z}_{21}^*$  nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk  $\mathbb{Z}_{21}^*$  összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ ?

Igen, mert  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$ , és  $\mathbb{Z}_{25}^*$  valóban 20-elemű ciklikus csoport.

## Példa

Igaz-e, hogy  $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ?

Nem, mert  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  kommutatív, de  $D_4$  nem az.

## Példa

Igaz-e, hogy  $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ?

Igen,  $V = A \times_b B$ , ahol  $A = \{\text{id}, (12)(34)\}$  és  $B = \{\text{id}, (13)(24)\}$

## Példa

Direkt felbontható-e a  $\mathbb{C}^*$  csoport?

Igen  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_b T$ , hiszen minden nemnulla  $z$  komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám szorzataként:

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

és ez a felírás egyértelmű.