MBN441G: ABSZTRAKT ALGEBRA GYAKORLAT

2014. MÁJUS 9.

1. Csoportok definíciója

1.1. Feladat. (1 pt.)
Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\mathbb{Z}_2; \cdot)$,
(2) $(\mathbb{Z}_2; +)$,
(3) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}; \circ)$, ahol $a \circ b = a + b + ab$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re,
(4) $(\mathbb{R}; \circ)$, ahol $x \circ y = 2x + y$ tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$-re,
(5) $(P(H); \cup)$, ahol H nemüres halmaz,
(6) $(P(H); \triangle)$, ahol H nemüres halmaz,
(7) $G = (\{a, b, c, 1, 2, 3\}; \cdot)$, ahol a (jelen esetben asszociatív) szorzást az alábbi művelettáblázat adja meg:

$\cdot$	a	b	c	1	2	3
a	1	2	3	a	b	c
b	2	3	1	b	c	a
c	3	1	2	c	a	b
1	a	b	c	1	2	3
2	b	c	a	2	3	1
3	c	a	b	3	1	2

1.2. Feladat. (1 pt.)
Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k\}; +)$,
(2) $(\mathbb{N}; +)$,
(3) $(\mathbb{Z}_8; +)$,
(4) $(\mathbb{Z}_8; \cdot)$,
(5) $(R_{15}; \cdot)$,
(6) $(R_{15}; +)$,
(7) $(\{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ relatív prímek és $2 \nmid b\};+)$,
(8) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; +)$,
(9) $(\{\varepsilon \in \mathbb{C} :$ létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\varepsilon^n = 1\}; \cdot\}$.

1.3. Feladat. (1 pt.)
Adja meg a G csoport azon elemeit, amelyek előállnak az a elem pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve egész kitevős hatványaiként.

(1) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $a = 1$,
(2) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $a = 3$,
(3) $G = D_5$, a pedig a középpont körüli $\frac{2\pi}{5}$ szöggel való forgatás,
(4) $G = (P(\{1, 2, 3\}; \triangle)$, $a = \{1, 2\}$,

(5) $G = (\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3), \cdot),\ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,
(6) $G = (R_{18}, \cdot),\ a = \overline{7}$,
(7) $G = (R_{24}, \cdot),\ a = \overline{5}$.

1.4. Feladat. (1 pt.)
Legyen a D_4 csoportban a a középpont körüli $\frac{\pi}{2}$ szöggel való forgatás, t pedig valamely szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözés. Mutassa meg, hogy ekkor $at = ta^{-1}$.

1.5. Feladat. (1 pt.)
Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a, b, c, x, y elemekre?

(1) $axb = ayb \Rightarrow x = y$,
(2) $xc = cy \Rightarrow x = y$.

A helyes következtetéseket igazolja, a hamisakra adjon ellenpéldát.

1.6. Feladat. (1 pt.)
Tekintsük az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon az $x * y = x\,|y|$ műveletet. Döntse el, hogy a fenti művelet rendelkezik-e az alábbi tulajdonságokkal:

- asszociatív,
- kommutatív,
- van bal, illetve jobb oldali egységeleme.

Csoportot alkot-e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a fenti műveletre nézve?

1.7. Feladat. (1 pt.)
Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(1) $(\{f \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}_p} : xf = ax + b : a, b \in \mathbb{Z}_p\}, \cdot)$,
(2) $(\{f \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}_p} : xf = ax + b : a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}_p\}, \cdot)$,

ahol p prím, $\cdot$ pedig a szokásos leképezésszorzás.

1.8. Feladat. (1 pt.)
Csoportot alkot-e az alábbi halmaz a megadott műveletre nézve?

$$(\{r \in \mathbb{R} : |r| < c\}, *),\ \text{ahol } r * s = \frac{r + s}{1 + \frac{rs}{c^2}},\ c \in \mathbb{R}^+ \text{ rögzített.}$$

1.9. Feladat. (1 pt.)
Milyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz az alábbi halmaz a megadott műveletre nézve csoport?

$$(\mathbb{R}, \circ),\ \text{ahol } x \circ y = ax + by + c \text{ tetszőleges } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

1.10. Feladat. (2 pt.)

(1) Mutassa meg, hogy a $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ halmazon egyetlen olyan asszociatív szorzás létezik, amelyre teljesülnek a következők:

- az $\{1, -1, i, -i\}$ részhalmazban ugyanúgy szorzunk, mintha a felsorolt elemek komplex számok lennének,
- az $\{1, -1, j, -j\}$ és $\{1, -1, k, -k\}$ részhalmazban ugyanígy számolunk, csak i helyett j-vel és k-val,
- $ij = k, jk = i, ki = j$.

(2) Továbbá igazolja, hogy Q csoportot alkot erre a szorzásra nézve.

Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezik.

1.11. Feladat. (2 pt.)
Egészítse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy csoport művelettáblázatát kapja:

$\cdot$	e	a	b	x	y	z
e	e					
a		b		y		
b		e				
x		z				
y						
z						

Választásait minden esetben indokolja.

1.12. Feladat. (2 pt.)
A D_n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) n-edfokú diédercsoportban jelölje a a középpont körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatást, t pedig az egyik tengelyes tükrözést.

(1) Igazolja, hogy $at = ta^{-1}$.
(2) Bizonyítsa be, hogy $D_n = \{\mathrm{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t\}$.
(3) Határozza meg, hogy a fent felsorolt elemek közül melyikkel egyenlők a következő elemek:

$$ta,\ ta^2,\ \dots,\ ta^{n-1},\ ta^{-2},\ (ata)^{2008},\ (ta^{-1}t)^{n-1}, (ata^3t^{-5}a^{-1})^{10n-50}.$$

1.13. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetriacsoportja $1, 2, 3$, illetve 4 elemű. Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetria- és mozgáscsoportja is 4 elemű.

1.14. Feladat. (1 pt.)
Írja le a kör mozgás- és szimmetriacsoportját.

1.15. Feladat. (1 pt.)
Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.16. Feladat. (2 pt.)
Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.17. Feladat. (1 pt.)
Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a, b, c, d, g, x, y elemekre?

(1) $abx = aby \Rightarrow x = y$,
(2) $xcd = ycd \Rightarrow y = x$,
(3) $cxd = dyc \Rightarrow x = y$,
(4) $abc = dbg \Rightarrow ac = dg$,
(5) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$,
(6) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$,
(7) $xab = c \Rightarrow x = cb^{-1}a^{-1}$,
(8) $xab = a \Rightarrow x = b^{-1}$.

1.18. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha egy csoportnak csak véges sok eleme van, akkor bármely elemére a pozitív egész kitevős hatványok halmaza ugyanaz, mint a negatív egész kitevős hatványok halmaza.

1.19. Feladat. (2 pt.)
Adjon meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, amelyben nem szerepel 0, azonban csak véges sok különböző hatványa van.

1.20. Feladat. (2 pt.)
Adja meg az n-edik komplex egységgyökök E_n csoportjának elemeit, és mindegyik esetén azt is, hogy hány különböző hatványa van.

2. Permutációk

2.1. Feladat. (1 pt.)
Számítsa ki a permutációk megadott szorzatait:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

2.2. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{6}$,

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{1433}$,

(6) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 5)$,
(7) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 6)$,

(8) $(2\ 4\ 5)(1\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2)$,
(9) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^3$,
(10) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^4$,
(11) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^5$.

2.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi permutációk paritását:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,
(3) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 6)$,
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 & 8 & 7 & 9 & 13 & 10 & 16 & 15 & 12 & 17 & 14 & 11 \end{pmatrix}^4$.

2.4. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi tulajdonságú π permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban:

(1) $((1\ 2\ 3)(2\ 1))^{-1}\pi = (2\ 4)$,
(2) $((1\ 2\ 3)(2\ 3))^{-1}\pi(2\ 3\ 1) = (3\ 1)$.

2.5. Feladat. (2 pt.)
Milyen a szerkezete — azaz a páronként idegen ciklusokra bontott alakjában milyen hosszúságú ciklusok szerepelnek, és melyikből mennyi — egy n hosszúságú ciklus k-adik hatványának?

2.6. Feladat. (2 pt.)
Milyen lehet a szerkezete

(1) egy 2 és egy $n > 2$ hosszúságú,
(2) egy 3 és egy $n > 3$ hosszúságú

ciklus szorzatának (ebben, illetve a fordított sorrendben)?

2.7. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg S_4-ben, illetve S_5-ben az alábbi egyenleteket:

(1) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\pi^3 = \mathrm{id}$,
(3) $\pi^2 = (1\ 2)$.

2.8. Feladat. (1 pt.)
Oldja meg az alábbi permutációegyenleteket a megadott szimmetrikus csoportban:

(1) S_4-ben: $\pi^2 = (1\ 3)(2\ 4)$,
(2) S_5-ben: $\pi^2 = (1\ 3\ 2\ 4)$,
(3) S_5-ben: $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

2.9. Feladat. (2 pt.)
Legyen π az A halmaz egy permutációja. Adott $a \in A$ esetén az a elem *pályája* az $\{a\pi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz.

(1) Igazolja, hogy a pályák halmaza osztályozása A-nak.
(2) Adja meg a $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto -k$ és a $\varrho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto k-1$ permutációk pályáit.

2.10. Feladat. (1 pt.)
Véges A halmaz esetén mi a kapcsolat a $\pi \in S_A$ permutáció pályái és π páronként idegen ciklusokra bontott alakja között?

2.11. Feladat. (2 pt.)
A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

2.12. Feladat. (2 pt.)
A páronként idegen cikusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció hatodik hatványaként.

2.13. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
(1) tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$,
(2) létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$ teljesül minden $\pi \in S_n$ permutáció esetén.

2.14. Feladat. (2 pt.)
Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Igazolja, hogy minden S_n-beli permutáció előáll
(1) az $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ transzpozíciók
(2) az $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)$ transzpozíciók szorzataként;
(3) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ ciklusok szorzataként.

2.15. Feladat. (2 pt.)
Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Igazolja, hogy minden A_n-beli permutáció előáll
(1) 3 hosszúságú ciklusok szorzataként,
(2) az $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \ldots, (n-2\ n-1\ n)$ ciklusok szorzataként.

2.16. Feladat. (1 pt.)
Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsa be, hogy ha két S_n-beli ciklus felcserélhető egymással, akkor mozgatott elemeik halmaza vagy diszjunkt, vagy egybeesik.

3. Elemek rendje

3.1. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a megadott elemek rendjét a megadott G csoportban:
(1) $G = S_6$; $(1\ 2\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)^{-1}$,
(2) $G = \mathbb{Z}_{12}$; $\overline{5}, \overline{9}, \overline{11}$,
(3) $G = \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^{12} = 1\}$; $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$,

(4) $G = R_{18}$; $\overline{5}, \overline{7}$,
(5) $G = \mathbb{Q}$; $\frac{5}{9}$.

3.2. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg a G csoportban k rendű elemet:

(1) $G = S_9,\ k = 8, 15$,
(2) $G = D_{18},\ k = 6$,
(3) $G = \mathbb{C},\ k = 12$.

3.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi csoportok véges rendű elemeit:

(1) $\mathbb{C}^*$,
(2) $\mathbb{Q}^*$,
(3) $\mathbb{Q}$,
(4) a kör szimmetriacsoportja.

3.4. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be az alábbi, véges fokú permutációkra vonatkozó állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát:

(1) Minden páros rendű permutáció páros.
(2) Minden páros permutáció rendje páros.
(3) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(4) Minden páratlan permutáció páros rendű.

3.5. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha a, b egy csoport tetszőleges véges rendű elemei, akkor

(1) $o(a) = o(b^{-1}ab)$,
(2) $o(ab) = o(ba)$.

3.6. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a $G = \{f \in S_{\mathbb{R}}, xf = ax + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ csoport véges rendű elemeit.

3.7. Feladat. (2 pt.)
Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

3.8. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

3.9. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

3.10. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

3.11. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy ha egy csoport valamely a, b elemeire és valamely $m, n \in \mathbb{Z}$ kitevőkre $ba = a^m b^n$, akkor az $a^m b^{n-2}$, $a^{m-2} b^n$ és ab^{-1} elemek rendje azonos.

3.12. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy minden S_n-beli permutáció rendje egyenlő a páronként idegen ciklusok szorzataként történő előállításában fellépő ciklusok hosszainak legkisebb közös többszörösével.

3.13. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje k.

3.14. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha n-nek van két különböző páratlan prímosztója, akkor az R_n csoport minden elemének rendje kisebb $\varphi(n)$-nél.

3.15. Feladat. (1 pt.)
Tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén adjon meg az $\mathrm{SL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban k rendű elemet.

4. Részcsoportok

4.1. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott G csoportban:

(1) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 6 \mid k\}$;
(2) $G = \mathbb{Z},\ H = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k \text{ vagy } 3 \mid k\}$;
(3) $G = \mathbb{C}^*,\ H = \{c \in \mathbb{C}^* : c^n = 1 \text{ valamely } n \in \mathbb{N}\text{-re}\}$;
(4) $G = S_4,\ H$ az összes transzpozíciók halmaza S_4-ben;
(5) $G = \mathbb{Z}_8,\ H = R_8$.

4.2. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be az alábbi állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát.

(1) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \cup K \leq G$.
(2) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \cap K \leq G$.
(3) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \triangle K \leq G$.

4.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(1) $G = \mathbb{Z}_{18},\ A = \{\overline{4}\}$,
(2) $G = \{\varepsilon : \varepsilon^{18} = 1\},\ A = \{\cos\frac{\pi}{9} + i \sin\frac{\pi}{9}\}$,
(3) $G = \mathbb{Z},\ A = \{6, 10, 15\}$,
(4) $G = \mathbb{Z}_{30},\ A = \{\overline{6}, \overline{15}\}$,
(5) $G = D_{12},\ A = \{a^2, at\}$,
(6) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$,
(7) $G = S_4,\ A = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$.

4.4. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:
(1) S_3,
(2) R_{13},
(3) R_{15}.

4.5. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).
(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) S_3.

4.6. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.
(1) $\mathbb{Z}_{18}$,
(2) V,
(3) $\mathbb{R}_{15}$,
(4) D_4.

4.7. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz:

$$E_{p^\infty} = \{\, u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1 \,\} \quad (p \text{ prímszám}).$$

4.8. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:
(1) $G = S_5$, $A = \{(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5)\}$,
(2) $G = \mathbb{Q}$, $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$.

4.9. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok vagy sem:
(1) A_3,
(2) R_{18},
(3) D_3.

4.10. Feladat. (1 pt.)
Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban (ha létezik).
(1) D_6,
(2) Q.

4.11. Feladat. (2 pt.)
Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(1) A_4,
(2) Q.

4.12. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy S_n minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

4.13. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy bármely G csoportra és bármely $H, K \leq G$-re $H \cup K$ pontosan akkor részcsoport, ha $H \subseteq K$ vagy $K \subseteq H$.

4.14. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport

(1) véges rendű elemeinek halmaza,
(2) legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza

részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot.

4.15. Feladat. (1 pt.)
Adjon példát olyan G csoportra és annak olyan H, K részcsoportjára, amelyekre HK nem részcsoportja G-nek.

4.16. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha H egy G csoport véges részhalmaza és $H^2 = H$, akkor H részcsoport G-ben.

4.17. Feladat. (2 pt.)
Mely $n \geq 3$ természetes számok esetén generátorrendszere az

$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ \ldots n)\}$$

halmaz az S_n csoportnak?

4.18. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy bármely

(1) $n \geq 2$-re S_n-nek,
(2) p prímszámra $L_{\mathbb{Z}_p}$-nek

van kételemű generátorrendszere.

4.19. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy ha egy G csoport generátorelemei felcserélhetők egymással, akkor G Abel-féle.

4.20. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G-nek van kételemű generátorrendszere.

4.21. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

4.22. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

4.23. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} (p prímszám) csoport minden valódi részcsoportja ciklikus.

4.24. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoportnak, valamint az E_{p^∞} (p prímszám) csoportoknak nincs minimális generátorrendszere.

4.25. Feladat. (2 pt.)
Tetszőleges $n \geq 3$ esetén határozza meg a D_n csoport összes részcsoportját.

5. Izomorfia

5.1. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy létezik-e olyan φ homomorfizmus, amely teljesíti a megadott feltételt:

(1) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S_3,\ 5\varphi = (1\ 2\ 3)$,
(2) $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_4,\ \overline{2}\varphi = \overline{2}$,
(3) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8,\ \overline{3}\varphi = \overline{2}$,
(4) $\varphi\colon Q \to V,\ i\varphi = (1\ 3)(2\ 4)$.

5.2. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy létezik-e

(1) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$,
(2) $V \to \mathbb{Z}_4$,
(3) $D_4 \to S_4$

nemtriviális, szürjektív, illetve injektív homomorfizmus.

5.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az összes

(1) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{18}$,
(2) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$

homomorfizmust.

5.4. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) R_6 és R_4,
(2) R_{15} és $\mathbb{Z}_8$,
(3) D_4 és Q,
(4) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$,
(5) a kör mozgáscsoportja és az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja.

5.5. Feladat. (1 pt.)
Adja meg az alábbi G csoportok g elemének képét a csoport Cayley-féle ábrázolásánál:

(1) $G = \mathbb{Z}_8,\ g = \overline{4}$,
(2) $G = S_3,\ g = (1\ 2)$,
(3) $G = D_6,\ g = a^3t$,
(4) $G = \mathbb{Z},\ g = -2$.

5.6. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg az összes $S_3 \to S_4$ injektív homomorfizmust.

5.7. Feladat. (2 pt.)
Jelölje D_∞ az alábbi alakzat szimmetriacsoportját:

$$\cdots\ \text{TTTTTTTTTTTTT}\ \cdots$$

Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén adjon meg szürjektív $D_\infty \to D_n$ homomorfizmust.

5.8. Feladat. (1 pt.)
Legyen G tetszőleges csoport, és jelölje $\varphi\colon G \to S_G$ a G csoport Cayley-ábrázolását. Mutassa meg, hogy a $G\varphi$ permutációcsoport rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) tetszőleges $\pi \in G\varphi \setminus \{\mathrm{id}\}$ permutáció mozgatja G összes elemét, azaz $g\pi \neq g$ az összes $g \in G$ elem esetén,
(2) tetszőleges $g, h \in G$ elemekhez létezik olyan $\pi \in G\varphi$ permutáció, amelyre $g\pi = h$.

5.9. Feladat. (2 pt.)

(1) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ nemtriviális, injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?
(2) Adja meg az összes $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ homomorfizmust.

5.10. Feladat. (1 pt.)
Legyen p prímszám. Adjon meg végtelen sok szürjektív, de nem injektív endomorfizmust az E_{p^∞} csoporton (azaz olyan $E_{p^\infty} \to E_{p^\infty}$ homomorfizmusokat, melyek szürjektívek, de nem injektívek).

5.11. Feladat. (2 pt.)
Adjon meg két különböző n pozitív egészre olyan n-edfokú permutációcsoportot, amely izomorf D_4-gyel, és amelyben tetszőleges $k, l \in \{1, \ldots, n\}$-hez van olyan permutáció, amely k-t l-be viszi.

5.12. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok (D_∞ definícióját lásd az 5.7. Feladatban):

(1) a kör szimmetriacsoportja és D_∞,

(2) D_∞ és az alábbi részcsoport $\mathrm{GL}(\mathbb{Q}, 2)$-ben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5.13. Feladat. (2 pt.)
Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(1) $\mathbb{Q}^+$ és $(\mathbb{Z}[x]; +)$,
(2) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^+$.

5.14. Feladat. (2 pt.)
Milyen $m, n \geq 3$ egészekre tartalmaz S_m a $\mathbb{Z}_n$, illetve D_n csoporttal izomorf részcsoportot?

5.15. Feladat. (2 pt.)
Adjon meg olyan részcsoportot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, mely izomorf az alábbi csoporttal:

(1) S_3,
(2) D_4,
(3) $\mathbb{C}^*$.

6. Normálosztók

6.1. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti jobb, illetve bal oldali mellékosztályozást, és döntse el, hogy H normálosztó-e:

(1) $G = [a],\ H = [a^d]$, ahol $o(a) = n \in \mathbb{N},\ d \mid n$,
(2) $G = D_n,\ H = [at]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$,
(3) $G = D_{2n},\ H = [a^n]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$,
(4) $G = S_4,\ H = V$,
(5) $G = S_4,\ H$ az $\{1, 2\}$ halmazt önmagába képező permutációk részcsoportja.

6.2. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy ha $H, K \leq G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

6.3. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált normálosztóját:

(1) $G = S_4,\ A = \{(1\ 3)(2\ 4)\}$,
(2) $G = D_6,\ A = \{a\}$,
(3) $G = D_6,\ A = \{a^2\}$,
(4) $G = D_6,\ A = \{at\}$,
(5) $G = Q,\ A = \{i\}$.

6.4. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy a G csoportban megadott N részcsoport normálosztó, valamint adja meg a G/N faktorcsoport elemeit. Milyen „ismert” csoporttal izomorf G/N?

(1) $G = S_7,\ N = A_7$,
(2) $G = S_4,\ N = V$,
(3) $G = R_{15},\ N = \{\overline{1}, \overline{14}\}$,
(4) $G = \mathbb{Q}^*,\ N = \{1, -1\}$.

6.5. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg a D_6, Q és S_4 csoport összes normálosztóját és összes faktorcsoportját, és döntse el, hogy a faktorcsoportok közül melyek izomorfak, illetve melyek nem izomorfak egymással.

6.6. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha a G csoport K részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor G-nek van olyan részcsoportja is, amely szerint K jobb oldali mellékosztály.

6.7. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha H, K részcsoportja a G véges csoportnak, akkor $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

6.8. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy minden $2n$ rendű Abel-csoport, ahol n páratlan szám, pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz.

6.9. Feladat. (2 pt.)
Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatodrendű csoportot.

6.10. Feladat. (1 pt.)
Adjon példát annak igazolására, hogy egy G csoport Abel-féle részcsoportja nem feltétlenül normálosztó.

6.11. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy az A_4 csoportban nincsen hatodrendű részcsoport.

6.12. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy tetszőleges G csoport esetén $\mathrm{Inn}G \triangleleft \mathrm{Aut}G$.

6.13. Feladat. (2 pt.)
Keressen (minél kisebb elemszámú) olyan G csoportot, amelyben vannak olyan M, N részcsoportok, amelyekre $M \triangleleft N$, $N \triangleleft G$, de M nem normálosztó G-ben.

6.14. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be, hogy ha a H részcsoport indexe a G csoportban 2, akkor $G \setminus H$ minden eleme páros rendű.

6.15. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy véges csoportban minden konjugáltsági osztály elemszáma osztja a csoport rendjét.

6.16. Feladat. (2 pt.)
Legyen G véges csoport, N pedig normálosztó G-ben. Jelölje G konjugáltsági relációjának N-re való megszorítását $\sim$, N konjugáltsági relációját pedig $\approx$. Bizonyítsa be, hogy $\approx\subseteq\sim$, és az egy $\sim$-osztályban lévő $\approx$-osztályok elemszáma azonos.

6.17. Feladat. (2 pt.)
Keresse meg a D_n $(n \geq 3)$ csoport összes valódi nemtriviális normálosztóját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert" csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport.

6.18. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy a G csoportban megadott N részcsoport normálosztó. Milyen „ismert" csoporttal izomorf G/N?

(1) $G = \mathrm{GL}(K, n)$, $N = \mathrm{SL}(K, n)$, ahol K test és $n > 1$ pozitív egész,
(2) $G = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{Z}$.

7. Izomorfia tételek

7.1. Feladat. (1 pt.)
Adja meg a homomorfiatétel alkalmazásával az összes

(1) $V \to \mathbb{Z}_4$,
(2) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{18}$,
(3) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$,
(4) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

homomorfizmust.

7.2. Feladat. (1 pt.)
Milyen „ismert" csoporttal izomorf

(1) az $\mathbb{R}^*/\{1, -1\}$ faktorcsoport,
(2) a $\mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}$ faktorcsoport, ahol $\mathbb{Z}[i]$ a Gauss-egészek additív csoportja.

7.3. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{SL}(\mathbb{C}, n)$ normálosztó $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, n)$-ben, valamint a $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, n)/\mathrm{SL}(\mathbb{C}, n)$ faktorcsoport izomorf $\mathbb{C}^*$-gal.

7.4. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg, hogy a megadott G csoport N normálosztója és H részcsoportja esetén mely csoportok izomorfiáját állítja az 1. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

(1) $G = Q, N = \{1, -1\}, H = \{1, i, -1, -i\}$,
(2) $G = S_6, N = A_6, H = [(1\ 2\ 3)]$,
(3) $G = \mathbf{Z}_{12}, N = [\overline{6}], H = [\overline{4}]$,
(4) $G = D_4, H = [at], N = [a]$.

7.5. Feladat. (1 pt.)
Adja meg, hogy mely csoportok izomorfiáját állítja az 1. izomorfiatétel abban a speciális esetben, amikor

(1) N a triviális normálosztó a G csoportban, H pedig tetszőleges részcsoport G-ben,
(2) $N = G$ és H tetszőleges részcsoport a G csoportban.

A két csoportot elemeikkel adja meg.

7.6. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg, hogy a megadott G csoport és $K \supseteq N$ normálosztói esetén mely két csoport izomorfiáját állítja a 2. izomorfiatétel. A két csoportot elemeikkel adja meg.

(1) $G = S_4,\ K = A_4,\ N = V$,
(2) $G = \mathbb{Q}^*,\ K = \{\frac{p}{q} : p, q \text{ páratlan egész}\},\ N = \{1, -1\}$.

7.7. Feladat. (1 pt.)
Adja meg, hogy mely csoportok izomorfiáját állítja a 2. izomorfiatétel abban a speciális esetben, amikor

(1) K tetszőleges, N pedig a triviális normálosztó a G csoportban,
(2) N tetszőleges normálosztó a G csoportban, és $K = G$,
(3) K tetszőleges normálosztó a G csoportban, és $N = K$.

A két csoportot elemeikkel adja meg.

7.8. Feladat. (2 pt.)
Adja meg az összes

(1) $D_4 \to S_4$,
(2) $Q \to S_4$

homomorfizmust.

7.9. Feladat. (2 pt.)

(1) Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen $D_m \to D_n$ nemtriviális, injektív, illetve szürjektív homomorfizmus?
(2) Adja meg az összes $D_m \to D_n$ homomorfizmust.

7.10. Feladat. (2 pt.)
Milyen „ismert" csoporttal izomorf

(1) a $\mathbb{C}^*/E$ faktorcsoport, ahol E az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja,
(2) az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ faktorcsoport.

7.11. Feladat. (2 pt.)
Legyen $\varphi \colon G \to H$ homomorfizmus, N pedig normálosztó G-ben. Mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy létezzen olyan $\psi \colon G/N \to H$ homomorfizmus, amelyre $\varphi = \nu\psi$. (Itt ν a $G \to G/N$ természetes homomorfizmust jelöli.)

7.12. Feladat. (2 pt.)
Legyen $\varphi\colon G \to H$ és $\psi\colon H \to L$ szürjektív homomorfizmus. Hogyan lehetne ebben a helyzetben alkalmazni a 2. izomorfiatételt, és az mit állítana?

7.13. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha M, N két különböző maximális normálosztó a G csoportban, akkor $M \cap N$ maximális normálosztó M-ben és N-ben.

7.14. Feladat. (2 pt.)
Határozza meg, melyik „ismert" csoporttal izomorf

(1) $\operatorname{Inn} Q$,
(2) $\operatorname{Inn} S_n$ ($n \in \mathbb{N}$),
(3) $\operatorname{Inn} D_n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$).

7.15. Feladat. (2 pt.)
Legyen G csoport, N pedig olyan normálosztója, amelyre G/N kommutatív. Mutassa meg, hogy ekkor G bármely, N-nél bővebb részcsoportja egyben normálosztó is G-ben.

7.16. Feladat. (2 pt.)
Tegyük fel, hogy a G csoport teljesíti a következő feltételeket:

(a) $|G| = 720$,
(b) G-nek nincsen nemtriviális ciklikus normálosztója,
(c) G-nek van olyan A_5-tel izomorf N normálosztója, amelyre G/N ciklikus.

Igazolja, hogy G-nek pontosan 7 normálosztója van.

8. Csoportok direkt szorzata

8.1. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy ha A n-elemű halmaz, akkor a $(P(A); \triangle)$ csoport izomorf $\mathbb{Z}_2^n$-nel. [Itt $\mathbb{Z}_2^n$ az n-tényezős $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ direkt szorzatot jelenti.]

8.2. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy igazak-e vagy sem a következő izomorfiák:

(1) $D_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,
(2) $R_{15} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$,
(3) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$,
(4) $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$,
(5) $S_4 \cong V \times S_3$,
(6) $D_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times D_3$.

Ha az izomorfia igaz, akkor adjon meg a bal oldalon álló csoportnak olyan előállítását normálosztói direkt szorzataként [additív esetben részcsoportjai direkt összegeként], ahol a normálosztók [részcsoportok] rendre izomorfak a jobb oldalon álló direkt tényezőkkel.

8.3. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e, valamint állítsa elő a direkt felbonthatókat nemtriviális normálosztóik direkt szorzataként (illetve additív csoport esetén direkt összegeként):

(1) $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{11}$,
(2) R_{25},
(3) Q,
(4) S_n,
(5) $\mathbb{Z}$.

8.4. Feladat. (1 pt.)
Határozza meg, hogy izomorfiától eltekintve hány olyan Abel-csoport van, amelynek rendje

(1) 70,
(2) 160,
(3) 720.

8.5. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy tetszőleges H és K csoportok esetén H, illetve K homomorf képe a $H \times K$ direkt szorzatnak. Mi a magja az állítás igazolására megadott homomorfizmusoknak?

8.6. Feladat. (1 pt.)
Mely n pozitív egészekre direkt felbonthatatlan a $\mathbb{Z}_n$ csoport?

8.7. Feladat. (2 pt.)
Mely $n \geq 3$ egész számok esetén direkt felbontható a D_n csoport?

8.8. Feladat. (2 pt.)
Legyen a H csoportnak h, a K csoportnak pedig k db részcsoportja. Igazolja, hogy

(1) a $H \times K$ csoportnak legalább hk db részcsoportja van,
(2) ha H és K rendje relatív prím, akkor $H \times K$-nak éppen hk db részcsoportja van.

Továbbá adjon példát olyan H és K csoportokra, amelyekre a $H \times K$ direkt szorzat részcsoportjainak száma több, mint hk.

8.9. Feladat. (2 pt.)
Döntse el, hogy az alábbi csoportok direkt felbonthatók-e, valamint állítsa elő a direkt felbonthatókat nemtriviális normálosztóik direkt szorzataként (illetve additív csoport esetén direkt összegeként):

(1) $\mathbb{Q}$,
(2) $\mathbb{Q}^+$,
(3) E_{p^∞} (p prímszám).

8.10. Feladat. (2 pt.)
Igazolja, hogy ha G csoport, H pedig részcsoportja G-nek, akkor H pontosan akkor normálosztó G-ben, ha a $\{(h,k) \in G \times G : hk^{-1} \in H\}$ halmaz részcsoportja $G \times G$-nek.

8.11. Feladat. (2 pt.)
Mutassa meg, hogy a véges Abel-csoportok körében érvényes a Lagrange-tétel megfordítása: Ha G véges Abel-csoport, $n \in \mathbb{N}$ pedig osztja $|G|$-t, akkor G-ben van n rendű részcsoport.

8.12. Feladat. (2 pt.)
Bizonyítsa be a véges Abel-csoportok alaptételének felhasználása nélkül, hogy ha valamely p prímszámra a G véges Abel-csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje p, akkor G előáll p rendű (ciklikus) részcsoportjainak direkt szorzataként.

8.13. Feladat. (2 pt.)
Legyenek G, H és K véges Abel-csoportok. Mutassa meg, hogy ha $G \times K \cong H \times K$, akkor $G \cong H$. Igaz-e az állítás tetszőleges Abel-csoportokra? Ha igen, bizonyítsa be, ha nem, adjon ellenpéldát.

8.14. Feladat. (2 pt.)
Állítsa elő a $\mathbb{Q}^*$ csoportot direkt felbonthatatlan részcsoportjainak direkt szorzataként.

8.15. Feladat. (2 pt.)
Legyen G olyan Abel-csoport, amelyben nincsen részcsoportoknak végtelen leszálló lánca [azaz nincsenek olyan H_n $(n \in \mathbb{N})$ részcsoportok, amelyekre $H_1 \supsetneqq H_2 \supsetneqq \dots \supsetneqq H_n \supsetneqq H_{n+1} \supsetneqq \dots$]. Bizonyítsa be, hogy G izomorf véges sok prímhatványrendű ciklikus csoport és E_{p^∞} (p prím) csoport direkt szorzatával.

9. Gyűrűk

9.1. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy tetszőleges A halmaz esetén $(P(A); \triangle, \cap)$ gyűrű.

9.2. Feladat. (1 pt.)
Igazolja, hogy tetszőleges A Abel-csoport esetén A endomorfizmusainak (azaz önmagába menő homomorfizmusainak) halmaza gyűrűt alkot a következő összeadásra és a szokásos leképezésszorzásra nézve:

$$a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi \quad (a \in A).$$

Ezt a gyűrűt A *endomorfizmusgyűrűjének* hívjuk.

9.3. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I halmaz részgyűrűt, illetve ideált alkot-e. Ha ideált alkot, akkor vizsgálja meg, hogy az ideál főideál-e, valamint adja meg az R/I faktorgyűrű elemeit és műveleteit (művelettáblázattal vagy más módon).

(1) $R = \mathbb{Z},\ I$ a páratlan egész számok halmaza,
(2) $R = \mathbb{Z},\ I$ a pozitív egész számok halmaza,
(3) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \mathbb{Z}$,
(4) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$,
(5) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$,
(6) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) = 1\}$,
(7) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$,
(8) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) \neq 1\}$.

9.4. Feladat. (1 pt.)
Döntse el az alábbi leképezésekről, hogy gyűrűhomomorfizmusok-e. Ha igen, határozza meg a magjukat, és fogalmazza meg, mi adódik a homomorfiatétel alkalmazásával.

(1) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto 4k$,
(2) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2, \overline{k} \mapsto \overline{k}$,
(3) $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}, f \mapsto f(0)$,
(4) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n, f \mapsto \overline{f(1)}$,
(5) $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, M \mapsto |M|$.

9.5. Feladat. (1 pt.)
Mutassa meg, hogy az alábbi gyűrűk nem izomorfak egymással:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$,
(2) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$.

9.6. Feladat. (2 pt.)
Legyen R olyan kommutatív, egységelemes gyűrű, melyben az egységelem additív rendje a p prímszám. Igazolja, hogy ekkor bármely $a, b \in R$ esetén

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

9.7. Feladat. (2 pt.)
Megadható-e a $\mathbb{Z}$ gyűrűben olyan részhalmaz, amely zárt az összeadásra és a kivonásra, azonban a szorzásra nem?

9.8. Feladat. (2 pt.)
Egy $(R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű alaphalmazán definiáljuk a következő műveleteket:

$$a \oplus b = a + b - 1 \quad \text{és} \quad a \circ b = a + b - ab \quad (a, b \in R).$$

Bizonyítsa be, hogy $(R; \oplus, \circ)$ is gyűrű, és izomorf az $(R; +, \cdot)$ gyűrűvel.

9.9. Feladat. (1 pt.)
Alkalmazza az 1. izomorfiatételt a következő R gyűrű S részgyűrűjére és I ideáljára:

(1) $R = \mathbb{Z},\ I = \langle 6 \rangle,\ S = \langle 4 \rangle$,
(2) $R = \mathbb{R}[x, y],\ I = \langle x^2 \rangle,\ S = \mathbb{R}[x]$.

9.10. Feladat. (1 pt.)
Alkalmazza a 2. izomorfiatételt a következő R gyűrű I és K ideáljára, ahol $I \subseteq K$:

(1) $R = \mathbb{Z}, I = \langle 10 \rangle, K = \langle 2 \rangle$,
(2) $R = \mathbb{Z}[x], I = \langle 3 \rangle, K = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 3 \mid f(0)\}$.

9.11. Feladat. (1 pt.)
Bizonyítsa be az alábbi izomorfiákat:

(1) $\mathbb{Z}_n / \langle \overline{d} \rangle \cong \mathbb{Z}_d$, ha $d \mid n$,
(2) $\mathbb{Z}[x] / \langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n[x]$,
(3) $\mathbb{R}[x,y] / \langle x - y \rangle \cong \mathbb{R}[x]$.

9.12. Feladat. (1 pt.)
Döntse el, hogy direkt felbonthatók-e a következő gyűrűk:

(1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{30}$,
(2) $\mathbb{R}[x]$,
(3) $\mathbb{Z}^{2\times 2}$,
(4) az a zérógyűrű, amelynek additív csoportja a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ csoport.

A direkt felbontható gyűrűket állítsa elő két nemtriviális ideáljuk direkt összegeként.

9.13. Feladat. (1 pt.)

(1) Döntse el, hogy az alábbi faktorgyűrűk testek-e vagy sem:

$$\begin{array}{ll} R_1 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle, & R_2 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{1} \rangle, \\ R_3 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + \bar{1} \rangle, & R_4 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^2 + \bar{1} \rangle, \\ R_5 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle, & R_6 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{1} \rangle, \\ R_7 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x^2 + \bar{1} \rangle, & R_8 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4 + \bar{1} \rangle, \\ R_9 = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \bar{2} \rangle, & R_{10} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^4 + \bar{1} \rangle. \end{array}$$

(2) Adja meg a megadott faktorgyűrű r elemét $\overline{g}$ alakban, ahol g fokszáma a lehető legkisebb a saját osztályában:

$$\begin{array}{ll} R_1 \ni r = \left(\overline{x + \bar{1}}\right)^4, & R_2 \ni r = \left(\overline{x^2 + x}\right)^{-1}, \\ R_3 \ni r = \left(\overline{x^3 + \bar{1}} \cdot \overline{x^3 + x + \bar{1}}\right)^{-1}, & R_5 \ni r = \left(\overline{x - \bar{1}}\right)^{-3}, \\ R_7 \ni r = \left(\overline{x^2 - \bar{1}}\right)^{-1} \cdot \overline{x^2 + x - \bar{1}}, & R_9 \ni r = \left(\overline{-\bar{2}x - \bar{2}}\right)^{-1}. \end{array}$$

9.14. Feladat. (2 pt.)
Izomorf-e egymással a $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 2 \rangle$, illetve $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4 \rangle$ gyűrű?

9.15. Feladat. (2 pt.)
Legyen az R gyűrű egy ideálja I. Bizonyítsa be, hogy

(1) $I[x]$ ideál $R[x]$-ben, $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$ és $R[x]/(I[x] + \langle x \rangle) \cong R/I$;

(2) ha S olyan részgyűrű R-ben, amelyre $S \cap I = \{0\}$, akkor $(S + I)/I \cong S$.

9.16. Feladat. (2 pt.)
Adja meg a $\mathbb{Z}_{120}$ gyűrű összes előállítását ideáljainak direkt összegeként.

9.17. Feladat. (2 pt.)
Mely A halmazok esetén direkt felbonthatatlan a $(P(A); \triangle, \cap)$ gyűrű?

9.18. Feladat. (2 pt.)
Direkt felbontható-e a

(1) $\mathbb{Z}[i]$,
(2) $\mathbb{R}[x]/\langle(x-1)(x-2)\rangle$

gyűrű?