5. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek

5.1. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi leképezések közül? Ha leképezés bilineáris, akkor adjuk meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2 y_2$;

(b) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$;

(c) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_1 y_1$;

(d) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2$;

(e) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

5.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.)

(a) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;

(b) $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;

(c) $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(d) $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(e) $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

5.3. Feladat. Keressünk az alábbi A szimmetrikus mátrixokhoz olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

(a) $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$.

5.4. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken!

(a) $(4, 4), (0, 4)$;

(b) $(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;

(c) $(1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;

(d) $(1, 0, -1), (0, 2, 0), (0, 4, 1)$.

5.5. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.