7. feladatsor – Véges testek

7.1. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti f polinom esetén $T[x]/\langle f\rangle$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

(a) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^2 + x + \overline{1}$;
(b) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^2 + \overline{1}$;
(c) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^2 + \overline{1}$;
(d) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}$;
(e) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$;
(f) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^4 + x^3 + \overline{1}$;
(g) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^4 + x^2 + \overline{1}$.

7.2. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{2}\rangle$ test alábbi elemeit:

(a) $\overline{x + \overline{2}} + \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}}$;
(b) $\overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}} \cdot \overline{x + \overline{2}}$;
(c) $\overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{2}}$;
(d) $\overline{x + \overline{2}}^{-1}$.

7.3. Feladat. Végezzük el a műveleteket a megadott K véges testekben.

(a) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + \overline{1}\rangle$; $\quad \overline{x^3 + x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{1}}$, $\quad \overline{x^3 + x^2}^{-1}$;
(b) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}\rangle$; $\quad \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{2}}$, $\quad \overline{x^2 + \overline{2}x + \overline{1}}^{-1}$;
(c) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{1}\rangle$; $\quad \overline{x^2 + x + \overline{1}} \cdot \overline{x^2 + \overline{2}x}$, $\quad \overline{x^2 + x + \overline{1}}^{-1}$.

7.4. Feladat. Határozzuk meg a K testben az α elem rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az adott elem a K testben.

(a) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + \overline{1}\rangle,\ \alpha = \overline{x + \overline{1}}$;
(b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + \overline{1}\rangle,\ \alpha = \overline{x^2 + \overline{1}}$;
(c) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \overline{2}x + \overline{2}\rangle,\ \alpha = \overline{x + \overline{1}}$;
(d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + \overline{2}\rangle,\ \alpha = \overline{x + \overline{1}}$.

7.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in K$ elem minimálpolinomját.

(a) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \overline{2}x + \overline{2}\rangle,\ \alpha = \overline{x + \overline{1}}$;
(b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{1}\rangle,\ \alpha = \overline{x + \overline{1}}$;
(c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + \overline{1}\rangle,\ \alpha = \overline{x^2 + \overline{1}}$.