

Permutációk véges halmazon

(előadásvázlat, 2008. február 12.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **ismétlés nélküli variáció, leképezés, indulási és érkezési halmaz, szürjektív, injektív, bijektív és identikus leképezés, leképezések szorzata és inverze, csoport, Abel-csoport, asszociatív, illetve kommutatív művelet, egységelem, csoportelem inverze és hatványa, determináns** és tulajdonságai.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.
- Szendrei Ágnes: *Diszkrét matematika*, Polygon Kiadó, Szeged, 1994–2002.

1. Definíció. Az A halmaz **permutációin** a $\pi : A \rightarrow A$ bijektív leképezéseket értjük. Tetszőleges n pozitív egészre az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát S_n -nel jelöljük.

2. Jelölés. A $\pi \in S_n$ permutációt megadhatjuk **kétsoros írásmóddal**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix},$$

vagy **elem párok halmazaként:**

$$\pi = \{(1, 1\pi), (2, 2\pi), \dots, (n, n\pi)\}.$$

3. Példa. Ha $\alpha \in S_3$ az a permutáció, amelyre $1\alpha = 2$, $2\alpha = 1$ és $3\alpha = 3$, akkor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}.$$

4. Példa. Nem minden leképezés permutáció, például a

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$$

leképezés se nem injektív (mert az 1 és 3 elemeknek ugyanaz a képe) se nem szürjektív (mert az érkezési halmaz 2 elemének nincs enné).)

5. Tétel. $|S_n| = n!$

6. Példa.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Tétel. $(S_n; \circ)$ csoport.

8. Példa. Számoljuk ki az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációk szorzatát. Tudjuk, hogy minden x elemre $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ (ez a leképezés szorzás definíciója). Tehát

$$\begin{aligned} 1(\alpha\beta) &= (1\alpha)\beta = 2\beta = 3, \\ 2(\alpha\beta) &= (2\alpha)\beta = 1\beta = 2, \\ 3(\alpha\beta) &= (3\alpha)\beta = 3\beta = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Most kiszámoljuk a $\beta\alpha$ szorzatot is (a zárójelek elhagyásával):

$$\begin{aligned} 1\beta\alpha &= 2\alpha = 1, \\ 2\beta\alpha &= 3\alpha = 3, \\ 3\beta\alpha &= 1\alpha = 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, azaz a permutációk szorzása nem kommutatív. Végezetül kiszámoljuk β inverzét. Mivel

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

ezért

$$\beta^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Természetesen β és β^{-1} szorzata az identikus leképezés:

$$\beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutáció az $x \in \{1, \dots, n\}$ elemet **mozgatja**, ha $x\pi \neq x$. A $\pi \in S_n$ által **mozgatott elemek halmazát** M_π -vel jelöljük, azaz

$$M_\pi = \{x \in \{1, \dots, n\} : x\pi \neq x\}.$$

10. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció által mozgatott elemek halmaza $M_\alpha = \{1, 2\}$.

11. Kérdések. Hány olyan $\pi \in S_9$ permutáció van, amelyre

- (1) $M_\pi = \{2, 3, 5\}$,
- (2) $|M_\pi| = 1$,
- (3) $|M_\pi| = 2$,
- (4) $|M_\pi| = 3$?

12. Definíció. A $\pi, \sigma \in S_n$ permutációkat **idegenek** nevezük, ha $M_\pi \cap M_\sigma = \emptyset$.

13. Kérdések.

- (1) Az S_n halmazon az „idegenség” reláció reflexív, szimmetrikus, illetve tranzitív-e?
- (2) Hány olyan permutációja van S_4 -nek, amely az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ permutációval idegen?
- (3) Van-e olyan permutáció, amely idegen az inverzével?

14. Tétel. Ha a $\pi, \sigma \in S_n$ permutációk idegenek, akkor

- (1) $\pi\sigma = \sigma\pi$, és
- (2) $(\pi\sigma)^k = \pi^k\sigma^k$ minden k egészre.

15. Definíció. Legyen $n \geq k \geq 2$, és az $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ elemek páronként különbözőek. Ekkor azt a $\pi \in S_n$ permutációt, amelyre

$$\begin{aligned} a_1\pi &= a_2, \\ a_2\pi &= a_3, \\ &\vdots \\ a_{k-1}\pi &= a_k, \\ a_k\pi &= a_1, \end{aligned}$$

és $x\pi = x$ minden $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ elemre, **ciklusnak** nevezzük és röviden így jelöljük:

$$\pi = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k).$$

A k számot a ciklus **hosszána**k nevezzük. A 2 hosszúságú ciklusokat **transzpozícióknak** hívjuk.

16. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció ciklus, mivel a $k = 2$, $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$ választással éppen ezt a permutációt kapjuk, azaz $\alpha = (1 \ 2)$. Mivel α hossza éppen 2, ezért α transzpozíció is. A

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció szintén ciklus, és $\beta = (1 \ 2 \ 3)$.

17. Kérdések.

- (1) Mi az $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k)$ ciklus által mozgatott elemek halmaza?
- (2) Igaz-e, hogy ha $\pi, \sigma, \tau \in S_7$ páronként idegen permutációk, akkor $(\pi\sigma\tau)^5 = \pi^5\sigma^5\tau^5$?

18. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy egy permutáció ciklusos alakban való megadása nem egyértelmű! Egyrészt ugyanazt a permutációt többféleképpen is felírhatjuk ciklusként:

$$(1 \ 2 \ 3) = (2 \ 3 \ 1) = (3 \ 1 \ 2).$$

A másik probléma pedig az, hogy az $(1 \ 2 \ 3)$ permutációról nem tudjuk eldönteni, hogy az S_3 vagy esetleg az S_4 csoport eleme-e. Természetesen ha S_3 -beli permutációkról beszélünk, akkor

$$(1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

viszont S_4 -ben már

$$(1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

és ez a két permutáció nem ugyanaz. Ugyan ez a probléma az identikus permutáció „id” jelölésével is, arról sem lehet eldönteni, hogy melyik permutációcsoportban használjuk.

19. Példa.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\text{id}\}, \\ S_2 &= \{\text{id}, (1 \ 2)\}, \\ S_3 &= \{\text{id}, (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3), (1 \ 2 \ 3), (3 \ 2 \ 1)\}. \end{aligned}$$

20. Kérdések.

- (1) Hány transzpozíció van S_4 -ben?
- (2) Hány 3-hosszúságú ciklus van S_4 -ben?
- (3) Hány 4-hosszúságú ciklus van S_4 -ben?
- (4) Hány 1-hosszúságú ciklus van S_4 -ben?

- (5) Hány ciklus van S_4 -ben?
 (6) Hány olyan permutáció van S_4 -ben amely nem ciklus?
 (7) Hány n -hosszúságú ciklus van S_n -ben?

21. Példa. Természetesen nem minden permutáció ciklus, vegyük például a

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

permutációt. Tegyük fel, hogy π ciklus, és tekintsük azt az esetet, amikor $a_1 = 1$. Ekkor $a_1\pi = 2$, azaz $a_2 = 2$, továbbá $a_2\pi = 3$, azaz $a_3 = 3$. A következő lépésben azt kapjuk, hogy $a_3\pi = 1$ ami éppen egyenlő a_1 -gyel, azaz $k = 3$ és az $(1\ 2\ 3)$ ciklust kaptuk. Viszont π több elemet mozgat mint 3, tehát π nem egyenlő $(1\ 2\ 3)$ -mal, azaz $a_1 \neq 1$. Minden más esetben hasonló ellentmondásra jutunk.

Persze π előáll ciklusok szorzataként:

$$\pi = (1\ 2\ 3)(4\ 5).$$

22. Tétel. Minden S_n -beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott. (Az identikus permutációt ciklusok üres szorzatának tekintjük.)

23. Példa. Adjuk meg a $\pi = (5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7)$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Tekintsük azokat az elemeket, melyeket a szorzat valamely tagja mozgat: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Vegyünk ki ezek közül egyet, mondjuk az 1-gyet, és számoljuk ki, hogy ezt a π permutáció milyen elemekbe viszi át:

$$1\pi = 1(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(4\ 3\ 7) = 7.$$

Folytassuk a kapott elemekkel, azaz

$$7\pi = 7(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(4\ 3\ 7) = 4,$$

$$4\pi = 4(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(4\ 3\ 7) = 1.$$

Visszaértünk ahhoz az elemhez, amiből kiindultunk, tehát megvan az első ciklusunk: $(1\ 7\ 4)$. A maradék elemekből vegyük a következőt, mondjuk a 2-t, és számoljuk ki hogy ezt π milyen elemekbe viszi át:

$$2\pi = 2(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(4\ 3\ 7) = 5,$$

$$5\pi = 5(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 2(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 2(4\ 3\ 7) = 2,$$

azaz a második ciklus a $(2\ 5)$ transzpozíció. Kimaradt még a 3, amelyre elvégezve a számolást azt kapjuk, hogy

$$3\pi = 3(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 4(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 4(4\ 3\ 7) = 3,$$

azaz π a 3-mat nem mozgatja, tehát ezt az elemet figyelmen kívül hagyhatjuk. Tehát π páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakja $\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5)$. Ezt a számolást nem írjuk le általában, hanem fejben végezzük el!

24. Kérdések. Hány olyan permutáció van G -ben, amelynek páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakja P alakú:

- (1) $G = S_4$, $P = (\cdot \cdot)(\cdot \cdot)$,
 (2) $G = S_5$, $P = (\cdot \cdot)(\cdot \cdot)$,
 (3) $G = S_5$, $P = (\cdot \cdot)(\cdot \cdot \cdot)$?

25. Tétel. Tetszőleges $\pi = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k) \in S_n$ ciklusra

- (1) $\pi^{-1} = (a_k\ a_{k-1}\ \dots\ a_1)$,
 (2) $\pi^k = \text{id}$,
 (3) Ha $i \equiv j \pmod{k}$, akkor $\pi^i = \pi^j$.

26. Példa. Kiszámoljuk az $((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9))^{-22}$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Mivel az $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(5\ 6\ 7)$ és $(8\ 9)$ ciklusok páronként idegenek, ezért

$$((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9))^{-22} = (1\ 2\ 3\ 4)^{-22}(5\ 6\ 7)^{-22}(8\ 9)^{-22}.$$

Az $(1\ 2\ 3\ 4)$ ciklus hossza 4 és a -22 -edik hatványát keressük. Mivel $-22 \equiv 2 \pmod{4}$, ezért

$$(1\ 2\ 3\ 4)^{-22} = (1\ 2\ 3\ 4)^2 = (1\ 3)(2\ 4).$$

Hasonlóan $-22 \equiv -1 \pmod{3}$, illetve $-22 \equiv 0 \pmod{2}$, azaz

$$(5\ 6\ 7)^{-22} = (5\ 6\ 7)^{-1} = (7\ 6\ 5), \text{ és}$$

$$(8\ 9)^{-22} = (8\ 9)^0 = \text{id}.$$

Tehát

$$((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7))^{-22} = (1\ 3)(2\ 4)(7\ 6\ 5).$$

27. Példa. Oldjuk meg az

$$(1\ 3\ 2)(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (2\ 6)$$

egyenletet. Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a permutációval ugyanarról az oldalról beszorozhatjuk. Először balról szorzunk $(1\ 3\ 2)$ inverzével:

$$(1\ 3\ 2)^{-1}(1\ 3\ 2)(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (1\ 3\ 2)^{-1}(2\ 6),$$

azaz

$$(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (2\ 3\ 1)(2\ 6).$$

Ezt folytatva azt kapjuk, hogy

$$\pi = (5\ 2)(2\ 3\ 1)(2\ 6)(7\ 5\ 4),$$

amit a szokásos módon páronként idegen ciklusok szorzatára bontunk: $\pi = (5\ 3\ 1\ 6\ 2\ 4\ 7)$.

28. Tétel. *Tetszőleges ciklus felírható transzpozíciók szorzataként, mégpedig*

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_1\ a_3)\dots(a_1\ a_k).$$

Következésképpen, minden permutáció transzpozíciók szorzatára bontható (de ez általában nem egyértelmű).

29. Példa. $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(5\ 6)$, de mivel $(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1)$, ezért $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(2\ 4)(2\ 1)(5\ 6)$, vagy $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(5\ 6)(2\ 4)(2\ 1)$, mert idegen transzpozíciók felcserélhetők.

30. Tétel. *Minden permutáció vagy csak páros vagy csak páratlan sok transzpozíció szorzataként írható fel.*

31. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutációt **párosnak** nevezzük, ha felbontható páros sok transzpozíció szorzatára. A nempáros permutációkat **páratlannak** nevezzük. Továbbá definiáljuk:

$$\text{sgn } \pi = \begin{cases} +1, & \text{ha } \pi \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

32. Kérdések. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

- (1) Az identitás páros.
- (2) Minden transzpozíció páratlan.
- (3) Minden páros hosszú ciklus páros.
- (4) Minden páratlan hosszú ciklus páros.
- (5) Páros permutációk szorzata páros.
- (6) Páratlan permutációk szorzata páros.
- (7) Páros és páratlan permutáció szorzata páratlan.
- (8) Páratlan permutációk inverze páratlan.

33. Példa. Megmutatjuk, hogy a 4×4 -gyes tologatós játékban a baloldali kezdőállásból nem lehet előállítani a jobboldalit:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & \\ \hline \end{array}$$

A játék minden állásához hozzárendeljük az S_{16} csoport egyik elemét, mégpedig úgy, hogy az üres mező helyébe a 16-os számot képzeljük, és a kapott

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \hline a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \hline \end{array}$$

táblázatot felhasználva képezzük a

$$\pi_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}$$

permutációt. Vegyük észre, hogy ha egy állapotban eltolunk egy négyzetet, akkor lényegében felcseréltük a 16-os számot valamely másik számmal. Tehát egy transzpozíciót hajtottunk végre, azaz az állapothoz rendelt permutáció paritása megváltozik. Mivel mind az A mind a B állapotban az üres mező a jobb alsó sarokban van, ezért biztos hogy páros sok lépést kell megtennünk A -ból B -be (ugyanannyiszor kell a 16-os számnak felfelé és lefelé, illetve balra és jobbra mozognia). Páros sok lépés során a hozzárendelt permutáció paritása nem változik. De az A kezdőállapotra $\pi_A = \text{id}$ ami páros, míg a jobboldali állapotra $\pi_B = (1\ 2)$ ami páratlan. Tehát nem lehet az A állapotból a B állapotba jutni.

34. Definíció. Az S_n csoportot az **n -edrendű szimmetrikus csoportnak** nevezzük. A páros permutációk $A_n = \{ \pi \in S_n : \pi \text{ páros} \}$ halmaza szintén csoportot alkot, amelynek neve az **n -edrendű alternáló csoport**.

35. Kérdések.

- (1) Hány páratlan permutáció van S_3 -ban?
- (2) Hány páros permutáció van S_3 -ban?
- (3) Hány páratlan permutáció van S_1 -ben?
- (4) Hány páros permutáció van S_1 -ben?

36. Tétel. *Tetszőleges $n \geq 2$ egészre $|A_n| = \frac{n!}{2}$.*