

Lineáris leképezések

(előadásvázlat, 2009. március 25.)

Maróti Miklós

Ennek az előadásnak a megértéséhez a következő fogalmakat kell tudni: **homogén lineáris egyenletrendszer** és annak **megoldásteréje**, vektorterek **izomorfizmusa** és **automorfizmusa**, **bázisátmenet mátrixa**.

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Definíció. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. A $\varphi : U \rightarrow V$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük (vagy **vektortér homomorfizmusnak**), ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén

$$(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi \quad \text{és} \quad (\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi).$$

Az U -ból V -be menő lineáris leképezések halmazát $\text{Hom}(U, V)$ jelöli. Az U -ból U -ba menő lineáris leképezéseket **lineáris transzformációknak** nevezzük. A bijektív lineáris leképezések a **vektortér izomorfizmusok**, továbbá a bijektív lineáris transzformációk a **vektortér automorfizmusok**.

2. Definíció. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés. A

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{u \in U : u\varphi = 0\}, \\ \text{Im } \varphi &= \{u\varphi : u \in U\} \end{aligned}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés **magjának**, illetve **képterének** nevezzük.

3. Tétel. Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre érvényesek a következők:

- (1) $0\varphi = 0$,
- (2) $\text{Ker } \varphi$ altér U -ban,
- (3) $\text{Im } \varphi$ altér V -ben,
- (4) φ akkor és csak akkor injektív, ha $\text{Ker } \varphi = \{0\}$,
- (5) Ha u_1, \dots, u_k generátorrendszer U -ban, akkor $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ generátorrendszer az $\text{Im } \varphi$ képtérben.
- (6) Ha $u_1\varphi, \dots, u_k\varphi$ lineárisan független vektorrendszer V -ben, akkor u_1, \dots, u_k lineárisan független U -ban.

4. Tétel (Lineáris leképezések dimenziótétele). Legyen U és V ugyanazon T test feletti vektortér, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ha U végesdimenziós, akkor

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi).$$

5. Következmény. Végesdimenziós vektortér lineáris transzformációja akkor és csak akkor injektív, ha szürjektív.

6. Következmény. Legyen T test, $m, n \geq 1$ és $A \in T^{m \times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének dimenziója (azaz a szabad változók száma) $n - r(A)$.

7. Tétel. Ha V a T test feletti n -dimenziós vektortér, akkor V izomorf a T^n vektortérrel. Tehát bármely két T -feletti n -dimenziós vektortér izomorf egymással.

8. Definíció. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ **lineáris leképezések összegén**, illetve a φ leképezés $c \in T$ **skalárral való szorzatán** azt a $\varphi + \psi : U \rightarrow V$, illetve $c\varphi : U \rightarrow V$ leképezéseket értjük, amelyekre

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi, \quad u(c\varphi) = c(u\varphi) \quad \text{minden } u \in U \text{ esetén.}$$

9. Tétel. Tetszőleges U és V ugyanazon T test feletti vektorterek esetén $\text{Hom}(U, V)$ a fent definiált műveletekkel vektorteret alkot T felett.

10. Tétel. Tetszőleges U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterekre érvényesek a következők:

- (1) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi\psi \in \text{Hom}(U, W)$.
- (2) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ bijektív, akkor $\varphi^{-1} \in \text{Hom}(V, U)$.
- (3) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$, $\psi \in \text{Hom}(V, W)$ és $c \in T$, akkor $c(\varphi\psi) = (c\varphi)\psi = \varphi(c\psi)$.
- (4) Ha $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $(\varphi + \psi)\tau = \varphi\tau + \psi\tau$.
- (5) Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ és $\psi, \tau \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $\varphi(\psi + \tau) = \varphi\psi + \varphi\tau$.

11. Tétel. Legyen U végesdimenziós, V pedig tetszőleges ugyanazon T test feletti vektortér, $e_1, \dots, e_n \in U$ bázis és $v_1, \dots, v_n \in V$ tetszőleges vektorrendszer. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, amelyre

$$e_1\varphi = v_1, e_2\varphi = v_2, \dots, e_n\varphi = v_n.$$

12. Definíció. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésre léteznek olyan egyértelműen meghatározott $a_{i,j} \in T$ skalárok, hogy

$$e_i\varphi = \sum_{j=1}^n a_{i,j}f_j \quad \text{minden } i = 1, \dots, m \text{ esetén.}$$

Az $(a_{i,j})_{m \times n}$ mátrixot a φ **lineáris leképezés** \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban megadott **mátrixának** nevezzük.

13. Tétel. Legyenek U és V végesdimenziós vektorterek a T test felett az $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m \in U$ és $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n \in V$ bázisokkal, továbbá legyen $A \in T^{m \times n}$ a $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban megadott mátrixa. Ha az $u \in U$ vektor koordinátasora az \mathcal{E} bázisban $x = (x_1, \dots, x_m)$, akkor az $u\varphi \in V$ vektor koordinátasora az \mathcal{F} bázisban xA .

14. Tétel. Legyenek \mathcal{E}, \mathcal{F} és \mathcal{G} rendre az U, V és W ugyanazon T test feletti végesdimenziós vektorterek bázisai. Legyen A és B rendre a $\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések mátrixai az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban, illetve C a $\tau \in \text{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{F} és \mathcal{G} bázisokban, és legyen $c \in T$. Ekkor

- (1) $A + B$ a $\varphi + \psi$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban,
- (2) cA a $c\varphi$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban,
- (3) AC a $\varphi\tau$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{G} bázisokban.

15. Következmény. Ha U m -dimenziós és V n -dimenziós vektortér a T test felett, akkor a lineáris leképezések $\text{Hom}(U, V)$ vektortere izomorf az $m \times n$ -es mátrixok $T^{m \times n}$ vektortereivel, és így mn dimenziós.

16. Definíció. Legyen $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ és $\mathcal{E}' : e'_1, \dots, e'_m$ a T test feletti U vektortér két bázisa. Az $\text{id} \in \text{Hom}(U, U)$ identikus lineáris leképezés \mathcal{E} és \mathcal{E}' bázisokban megadott mátrixát **az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra való áttérés mátrixának** hívjuk.

17. Tétel. Legyen a T test feletti U vektortér két bázisa \mathcal{E} és \mathcal{E}' , továbbá legyen P az áttérés mátrixa az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{E}' bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az \mathcal{E}' bázisról az \mathcal{E} bázisra való áttérés mátrixa P^{-1} .

18. Tétel. Legyenek U és V ugyanazon T test feletti vektorterek, \mathcal{E} és \mathcal{E}' az U , \mathcal{F} és \mathcal{F}' pedig a V vektortér bázisa. Jelölje P , illetve S az áttérés mátrixát \mathcal{E} -ről \mathcal{E}' -re, illetve \mathcal{F} -ről \mathcal{F}' -re. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az \mathcal{E} és \mathcal{F} bázisokban A . Ekkor φ mátrixa az \mathcal{E}' és \mathcal{F}' bázisokban $P^{-1}AP$.

19. Definíció. Legyen T test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n \times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

20. Következmény. Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.

21. Definíció. A φ **lineáris leképezés rangján** a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi) = \dim(\text{Im } \varphi)$.

22. Tétel. Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

23. Következmény. Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.

24. Tétel. Legyen U m -dimenziós és V n -dimenziós vektorterek ugyanazon T test fölött, és $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T^{m \times n},$$

ahol r a φ rangja, E_r az $r \times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

25. Következmény. Legyen T tetszőleges test. Ekkor minden $A \in T^{m \times n}$ mátrixhoz létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{m \times m}$ és $Q \in T^{n \times n}$ mátrixok, hogy

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobboldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

26. Definíció. Legyen T test, V vektortér T felett, és $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. A $\lambda \in T$ skalár a φ lineáris transzformáció **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla $v \in V$ vektor, hogy $v\varphi = \lambda v$.
A

$$\{v \in V : v\varphi = \lambda v\}$$

alteret a $\lambda \in T$ skalárhoz tartozó **sajátaltérnek** nevezzük. A nemnulla $v \in V$ vektor a φ lineáris transzformáció **sajátvektora**, ha valamely sajátaltérben benne van, azaz létezik olyan $\lambda \in T$, hogy $v\varphi = \lambda v$.

27. Definíció. Legyen T test, n pozitív egész. Az $A \in T^{n \times n}$ **mátrix sajátértéke**, **sajátaltere** és **sajátvektora** rendre a $\varphi : T^n \rightarrow T^n$, $x \mapsto xA$ lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere, illetve sajátvektora. Azaz $\lambda \in T$ és $x \in T^n$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor pár, ha $xA = \lambda x$.

28. Tétel. Legyen V n -dimenziós vektortér a T test felett, e_1, \dots, e_n bázis V -ben, $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ és $A \in T^{n \times n}$ a φ lineáris transzformáció mátrixa az e_1, \dots, e_n bázisban. Ekkor $\lambda \in T$ és $v \in V$ akkor és csak akkor sajátérték, sajátvektor párja φ -nek, ha λ és v koordinátasora sajátérték, sajátvektor párja A -nak.

29. Tétel. Legyen U tetszőleges vektortér a T test felett, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ páronként különböző sajátértékei a $\varphi \in \text{Hom}(U, U)$ lineáris transzformációnak, és U_1, \dots, U_k pedig ezen sajátértékekhez tartozó sajátalterek. Ha $U_1 + \dots + U_k = U$, akkor φ egyértelműen meghatározott.

30. Definíció. Az $A \in T^{n \times n}$ mátrix **karakterisztikus polinomja** az

$$f_A(x) = |A - xE|$$

determinánssal megadott T -feletti polinom. Az $f_A(x)$ polinom T -be eső gyökeit az A mátrix **karakterisztikus gyökeinek** nevezzük.

31. Tétel. Legyen T test. A $\lambda \in T$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke az $A \in T^{n \times n}$ mátrixnak, ha λ karakterisztikus gyöke A -nak.

32. Tétel. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

33. Definíció. Véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjának **karakterisztikus polinomja** a lineáris transzformáció valamely (bármely) bázisban felírt mátrixának karakterisztikus polinomja.