7. Hf MBN521G-1

Beadás: 2016. november 15. 14 óra (gyakorlaton)

1. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Adjuk meg $e^{At}$-t az alábbi $A$ mátrixokra!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ és tegyük fel, hogy $2-i$ az $A$ sajátértéke az $(1,-i)$ sajátvektorral. Adjuk meg $e^{At}$-t!

4. Legyen $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n+1}(t)$ az $x' = A(t)x + f(t)$ inhomogén egyenlet $n+1$ lineárisan független megoldása, ahol $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosak. Bizonyítsuk be, hogy az $x' = A(t)x + f(t)$ egyenlet bármely $x(t)$ megoldására

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + x_{n+1}(t)$$

teljesül olyan $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ konstansokkal, amelyekre $c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1} = 1$. Továbbá bármely olyan $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ konstansokra, amelyekre $c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1} = 1$, $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + x_{n+1}(t)$ megoldás.