Valószínűségszámítás

Kevei Péter

2022. december 1.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetelt.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω.

Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, mely σ-algebra. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt mérhetőségi térnek nevezzük.

Egy $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ halmazrendszert akkor nevezünk **σ-algebrának**, ha

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- valahányszor $A \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- valahányszor $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

Megjegyzés.

- Vegyük észre, hogy a $\{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer σ-algebra. Ez a triviális σ-algebra.
- A 2^{Ω} halmazrendszer, az Ω hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is σ-algebra. Abban az esetben, amikor az Ω alaphalmaz véges, akkor az események halmaza mindig a hatványhalmaz.

Események jelölése: $A, B, A_1, \ldots$.

- $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, elemi esemény
- $\emptyset$ a lehetetlen esemény
- Ω a biztos esemény
- A^c az ellentett esemény
- $A \cap B$ mindkét esemény bekövetkezik (A és B)
- $A \cup B$ a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- $A \cap B = \emptyset$ a két esemény kizárja egymást
- $A - B$ az A bekövetkezik de B nem
- $A \subset B$ az A esemény maga után vonja B-t

1.1. *Példa.* Háromszor földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F,F,F),(F,F,I),(F,I,F),(F,I,I),\\ (I,F,F),(I,F,I),(I,I,F),(I,I,I)\},$$

azaz $|\Omega| = 2^3 = 8$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^8 = 256$ az összes esemény száma.

Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor

$$A_1 = \{(F,F,F),(F,F,I),(F,I,F),(F,I,I)\}.$$

$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F,I,I)\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$
$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I,I,I)\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

1.2. *Példa.* Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit.
1. megoldás: Az azonos betűket nem különböztetjük meg.

$$\Omega = \{\text{AAAEIKMMTT, AAAEIKMTMT}, \ldots, \text{TTMMKIEAAA}\}$$

$|\Omega| = \frac{10!}{3!2!2!}$
$A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk }\} = \{\text{MATEMATIKA}\}$, azaz A elemi esemény.
2. megoldás: Az azonos betűket megkülönböztetjük.

$$\Omega = \big\{\mathrm{A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_1T_2}, \mathrm{A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_2T_1}, \ldots,\\ \mathrm{T_2T_1M_2M_1KIEA_3A_2A_1}\big\},$$

$|\Omega| = 10!$, és ha $A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk}\}$, $|A| = 3!2!2!$.

1.2. A valószínűségi mérték

1.3. Definíció. Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi téren, ha

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ha az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

  $$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbf{P}(A_i),$$

  azaz a halmazfüggvény σ-additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

1.4. Állítás (A valószínűség tulajdonságai)**.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *egy valószínűségi mező,* $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *események.*

(i) Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$*, minden* $i \neq j$ *párra, akkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n).$$

(ii) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, *és* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

(iv) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(v) Szita formula:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

(vi) $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(vii) $\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)$.

(viii) Ha A_n *monoton növő halmazsorozat, azaz* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

(ix) Ha A_n *monoton csökkenő halmazsorozat, azaz* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k)$.

(x) $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$ *(megszámlálható szubadditivitás).*

Bizonyítás. (i) Legyen $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$.

(ii) $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c)$.

(iii) $B = A \cup (B - A)$,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - A) \Rightarrow \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \geq 0.$$

(iv) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup (B - (A \cap B))) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - (A \cap B)) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(v) Teljes indukcióval. $n = 1, 2$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-ig igaz. A $B_i = A_i$, $i \leq n-1$, $B_n =$

$A_n \cup A_{n+1}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) = \mathbf{P}(B_1 \cup \ldots \cup B_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbf{P}(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{i_k < n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{i_{k-1} \le n-1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap (A_n \cup A_{n+1})) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{i_k < n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{i_{k-1} \le n-1} \Big[\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n \cap A_{n+1}) \Big] \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})
\end{aligned}$$

(vi) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \le \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(vii) Teljes indukcióval.

(viii) Vezessük be a $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \ge 2$ jelölést. Ekkor a B_n halmazok diszjunktak, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, és $\cup_{k=1}^{n} B_k = \cup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $n \ge 1$. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k) \\
= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n),
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

(ix) Mivel A_n monoton csökkenő, A_n^c monoton növekvő halmazsorozat, ezért használhatjuk az előző pont állítását. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) &= 1 - \mathbf{P}\left((\cap_{k=1}^{\infty} A_k)^c \right) = 1 - \mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k^c \right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \mathbf{P}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n),
\end{aligned}$$

amivel az állítást igazoltuk.

(x) Tetszőleges n természetes számra a véges szubadditivitás alapján

$$\mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^{n} A_k \right) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Mivel a $B_n = \cup_{k=1}^n A_k$ halmazsorozat monoton növekvő, így

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^n A_k\right) = \mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^\infty A_k\right),$$

ezért az egyenlőtlenségből határátmenettel kapjuk az állítást.

$\square$

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

1.3. Klasszikus valószínűségi mező

Az $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$ valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor persze szükségképpen $c = 1/|\Omega|$. Tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$.

1.3.1. Születésnap probléma

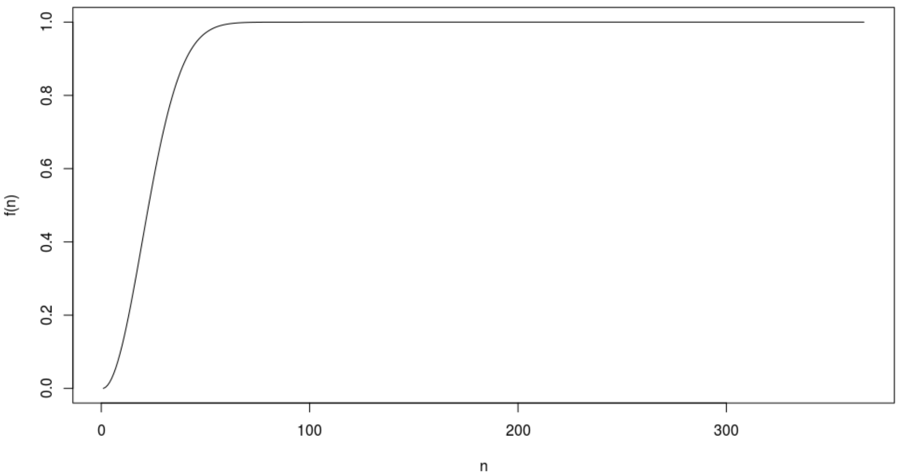
Mekkora a valószínűsége annak, hogy n ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?[1]

Jelölje $f(n)$ a keresett valószínűséget. Nyilván $f(1) = 0$, és $f(n) = 1$, ha $n \geq 366$, hiszen a skatulya-elv miatt biztosan van két ember, akik egy napon születtek.

Klasszikus valószínűségi mezőnk van, tehát eseteket számolunk. Az összes eset 365^n, hiszen minden ember 365 napon születhetett. Legyen $2 \leq n \leq 365$. Némi próbálgatás után rájöhetünk, hogy egyszerűbb a kedvezőtlen eseteket összeszámolni, azaz azokat az eseteket keressük, amikor mindenki más napon született. Valahogy (mondjuk ábécé sorrendben) sorbarakjuk az embereket. Ekkor az első ember 365 napon születhetett, a második nem születhetett azon a napon, amelyiken az első, ezért neki 364 lehetőség maradt. Hasonlóan, a harmadiknak már csak 363, stb. Végül a kedvezőtlen esetek számára $365 \cdot 364 \cdot \ldots (365 - n + 1)$ adódik. Így

$$\begin{aligned} f(n) = \mathbf{P}\big(&n \text{ ember között van 2, akiknek ugyanazon} \\ &\quad \text{a napon van a születésnapja}\big) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\text{ mindenkinek különböző napon van a születésnapja}) \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}. \end{aligned}$$

[1] Ez egy matematika feladat, azaz hallgatólagosan feltesszük, hogy az év 365 napos (eltekintünk a február 29-ektől), és minden ember egymástól függetlenül egyforma valószínűséggel született az év bármely napján. Ezek viszonylag természetes feltevések, de azért nem mindig teljesülnek. Ha a társaságban vannak ikrek, akkor persze már nem teljesülnek a feltételek.



1. ábra. $f(n)$ valószínűségek n függvényében

Világos, hogy $f(n)$ monoton nő, hiszen minél több ember van, annál nagyobb a közös születésnap esélye. Némileg meglepő, hogy $n = 23$ esetén a keresett valószínűség már $0,5$-nél nagyobb. Pontosabban

$$f(22) \approx 0,4757 < 1/2 < 0,5073 \approx f(23).$$

Az 1.3.1 ábrán azt is látjuk, hogy ez a valószínűség nagyon gyorsan tart 1-hez, $f(50) = 0,97$, azaz 50 ember között már nagyon valószínű hogy van két azonos születésnap. Az 1.3.1 ábrán ugyanezeket a valószínűségeket látjuk, csak az érdekes tartományra koncentrálva.

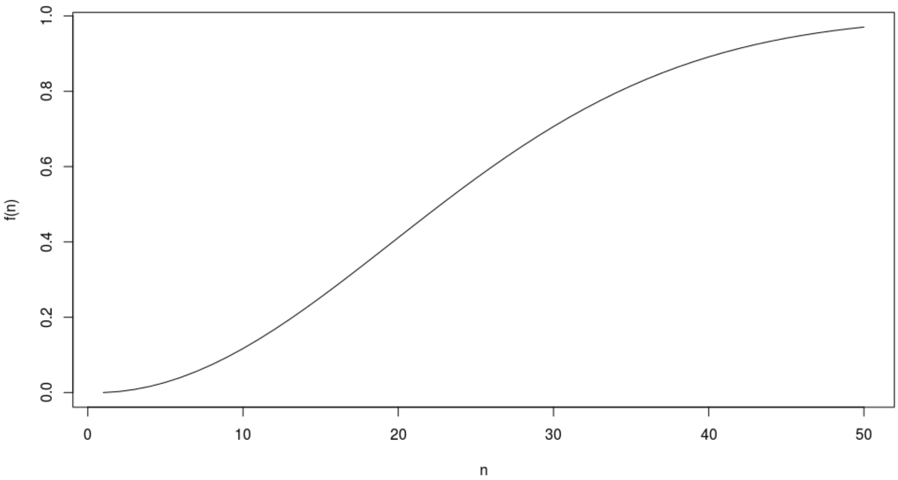
Az előzőeket általánosítva, tegyük fel, hogy egy kísérletnek N lehetséges kimenetele van, és minden kimenetel egyformán valószínű. Legalább hányszor kell elvégezni a kísérletet ahhoz, hogy $0,5$-nél nagyobb legyen annak a valószínűsége, hogy kétszer van ismétlődés?

A születésnap probléma pontosan ez a feladat $N = 365$ választással. Ha pedig $N = 6$, akkor arra kapunk választ, hogy hányszor kell dobni egy dobókockával, hogy $0,5$-nél nagyobb eséllyel legyen ismétlődés. Ha n-szer ismétlünk, $2 \leq n \leq N$, akkor annak az $f(n)$ valószínűsége, hogy van ismétlés

$$f(n) = 1 - \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}.$$

Ezt kicsit alakíthatjuk

$$1 - f(n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{N}\right).$$



2. ábra. $f(n)$ valószínűségek n függvényében, $n \leq 50$

A kérdés, hogy a jobboldali szorzat mikor lesz először $0,5$-nél kisebb. Ha x kicsi, akkor $1 - x \approx e^{-x}$ (ez éppen a deriválás definíciója), így a jobboldal nagyjából

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{N}\right\} = \exp\left\{-\frac{n^2}{2N}\right\}.$$

Ennek kell $0,5$-nek lenni, ahonnan kapjuk, hogy

$$n \approx \sqrt{2 \ln 2}\sqrt{N}.$$

Ez $N = 365$-re éppen $22,5$, tehát működik.

2. Néhány klasszikus probléma

2.1. A párosítási probléma

Veszünk n darab kártyát 1-től n-ig megszámozva. Összekeverjük, és véletlen sorrendben lerakjuk őket egy sorba. A k-adik helyen párosítás történik, ha a k-adik helyre a k sorszámú kártya kerül. (Tehát véletlen permutációk fixpontjait tekintjük.)

Arra keressük a választ, hogy mennyi a valószínűsége, hogy nem történik párosítás. Jelölje p_n ezt a valószínűséget.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-adik helyen párosítás történik, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor az az esemény, hogy legalább egy párosítás történik éppen $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Ennek a valószínűségét a szita formulával határozhatjuk meg. Eszerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathbf{P}(\text{ nincs párosítás }) = \mathbf{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) \\
&= 1 - \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \left(- \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Analízisből tudjuk, hogy tetszőleges x valós számra

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

ahonnan látjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0,368.$$

Ezek után határozzuk meg azt a valószínűséget, hogy pontosan k darab párosítás történik. Vezessük be a

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Nyilván $p_n = p_{n,0}$. Jelölje $N_{n,k}$ azon kimenetelek számát, amikor pontosan k párosítás történik n kártyával. Ezekkel a jelölésekkel $p_m = N_{m,0}/m!$ minden

m természetes szám esetén. Könnyen meggondolható, hogy

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{N_{n,k}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} N_{n-k,0}}{n!} = \frac{\binom{n}{k}(n-k)! p_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{p_{n-k}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Az utóbbi alakból rögtön látjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Megjegyzés. Valójában azt bizonyítottuk be, hogy egy véletlen permutáció fixpontjainak száma nagy n esetén közelítőleg Poisson-eloszlású, pontosabban a fixpontok száma eloszlásban konvergál egy 1-paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változóhoz. De erről majd később.

2.2. Buffon-féle tűprobléma (1777)

Akkor beszélünk geometriai valószínűségi mezőről, ha a kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg. Ekkor a lehetséges kimenetelek halmaza $\Omega = H \subset \mathbb{R}^n$, aminek a mértéke (hossza, területe, térfogata) pozitív és véges. Ekkor egy $A \subset H$ esemény valószínűsége arányos a halmaz mértékével, azaz

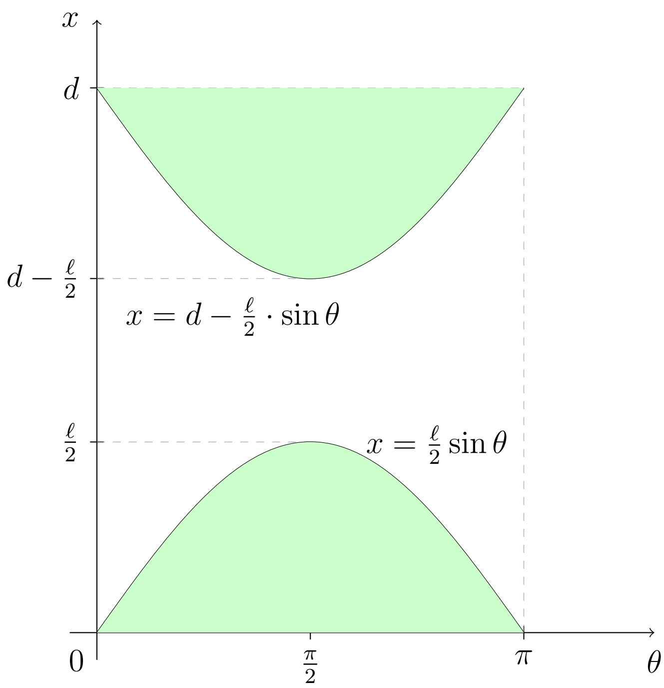
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(H)},$$

ahol λ az n-dimenziós Lebesgue-mérték (hossz, terület, térfogat).

Egy padló mintázata párhuzamos egyenesekből áll. A szomszédos egyenesek távolsága d. A padlóra ledobunk egy ℓ hosszú tűt, ahol $\ell \leq d$. Mekkora a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Jelölje x a tű középpontjának és a hozza legközelebbi, tőle balra levő egyenesnek a távolságát! Legyen Θ a tű függőlegessel bezárt szöge. Vegyük észre, hogy a tű akkor metszi a baloldali egyenest, ha $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}\sin\Theta$, és akkor metszi a jobboldalit, ha $0 \leq d - x \leq \frac{\ell}{2}\sin\Theta$. Ha x egyenletes eloszlású $[0, d]$-n és Θ egyenletes eloszlású $[0, \pi]$-n, akkor a kísérlet megfeleltethető egy pont egyenletes eloszlás szerinti választásának a $[0, d] \times [0, \pi]$ téglalapból. A kedvező területrész területe

$$2\int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\ell,$$



3. ábra. Kedvező terület a Buffon-féle problémánál

így a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{ van metszés }) = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Innen látjuk, hogy a π értékét meg lehet határozni empirikus módon.

2.3. de Méré paradoxona

1654: Pascal és Fermat levelezése de Méré lovag feladatairól, majd a „véletlen matematikájának" megalapozásáról.

de Méré lovag paradoxona: Miért nem ugyanakkora valószínűségű a következő két esemény:

- 1 kockával 4-szer dobva legalább egy hatost dobunk;
- 2 kockával 24-szer dobva legalább egy dupla hatost dobunk.

Legyen A az az esemény, hogy 1 kockával 4-szer dobva legalább egyszer dobunk 6-ost. Ekkor $\Omega = \{(1,1,1,1), \dots (6,6,6,6)\}$, azaz $|\Omega| = 6^4$. Mivel minden kimenetel egyformán valószínű, a valószínűségi mező klasszikus. A^c az az esemény, hogy nem dobunk 6-ost, így $|A^c| = 5^4$. Ezért

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177.$$

Vizsgáljuk most azt a kísérletet, hogy 2 kockával dobunk 24-szer, és legyen B az az esemény, hogy dobunk dupla 6-ost. Ekkor $|\Omega| = 36^{24}$, és $|B^c| = 35^{24}$, ezért

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(B^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

A *rossz*(!) intuíció az, hogy ha 4-szer megyünk neki egy 1/6 valószínűségű eseménynek, akkor a siker valószínűsége ugyanannyi, mint ha 24-szer megyünk neki egy 1/36-od valószínűségűnek, hiszen $4/6 = 24/36$.

2.4. Bertrand paradoxon (1888)

Véletlenszerűen választunk egy húrt egy r sugarú körön. Mennyi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írható szabályos háromszög oldala? Jelölje p ezt a valószínűséget.

1. Megoldás. A húr hosszát meghatározza a felezőpontjának (F) a kör középpontjától (O) vett távolsága. Ha $|OF| > r/2$, akkor a húr hosszabb, mint a szabályos háromszög oldala, különben rövidebb. Tehát a feladat megfeleltethető annak, hogy egy rögzített sugárról egyenletes eloszlás szerint választunk pontot. Ezért

$$p = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}.$$

2. Megoldás. Ha az egyik végpontot rögzítjük, akkor a húr hosszát meghatározza, hogy hova esik a másik végpont. Legyen ϑ a húrnak és a rögzített ponthoz húzott érintőnek a szöge. A húr pontosan akkor hosszabb, mint a háromszög oldala, ha $\vartheta \in (\pi/3, 2\pi/3)$. Ennek a valószínűsége nyilván 1/3, tehát

$$p = \frac{1}{3}.$$

3. Megoldás. A húr pontosan akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha a középpontja beleesik a háromszög beírt körébe. Ennek a valószínűsége $(r/2)^2\pi/(r^2\pi) = 1/4$, tehát

$$p = \frac{1}{4}.$$

A problémát természetesen az okozza, hogy a húr választását nem mondja meg a feladat. Azaz a véletlen nincs jól megadva.

2.5. Az igazságos osztozkodás problémája

Két játékos, Anna és Balázs játszanak. Mindketten 1/2 – 1/2 valószínűséggel nyernek egy-egy játékot. Az előre befizetett tétet az kapja, aki előbb nyer 10 játékot. A játék azonban 8–7 -es állásnál abbamaradt. Hogyan osszák el igazságosan a befizetett tétet?

Kicsit általánosabban a következő feladatot vizsgáljuk. Két játékos, Anna és Balázs játszanak. Annának a pont hiányzik a győzelemhez, Balázsnak pedig b. Egy-egy játékot Anna $p \in (0, 1)$ valószínűséggel nyer meg, Balázs pedig $1 - p$ valószínűséggel. Hogyan osszák el a tétet?

Már 15. században írnak a problémáról, de Méré előtt (Luca Pacioli (1494), Tartaglia ($\sim$1550)). Speciális esetekben meg is tudják oldani a feladatot, azonban a teljes megoldást Pascal és Fermat adják meg. A következőkben Fermat megoldását mutatjuk be.

Vegyük észre, hogy a játéksorozat $a + b - 1$ játékkal biztos véget ér. Anna pontosan akkor nyer, ha az $a + b - 1$ játékból legalább a játékot nyer meg. Így Anna nyerésének valószínűségét $P_A(a, b, p)$-vel jelölve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P_A(a, b, p) &= \mathbf{P}\left(a + b - 1 \text{ játékból Anna legalább } a \text{ pontot szerez}\right) \\
&= \sum_{k=a}^{a+b-1} \mathbf{P}\left(a + b - 1 \text{ játékból Anna pontosan } k \text{ pontot szerez}\right) \\
&= \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k}
\end{aligned}$$

Mivel pontosan az egyikük nyer $P_A + P_B = 1$, a binomiális tétel szerint pedig

$$\sum_{k=0}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k} = (p + (1-p))^{a+b-1} = 1,$$

ezért Balázs nyerésének valószínűsége

$$P_B(b, a, 1-p) = \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k}.$$

A $p = 1/2$ esetben ez a következőt adja:

$$\begin{aligned} P_A\left(a, b, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{a+b-1}} \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k}, \\ P_B\left(b, a, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{a+b-1}} \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k}. \end{aligned}$$

Ezek szerint a tétet

$$\frac{P_A\left(a, b, \frac{1}{2}\right)}{P_B\left(b, a, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k}}{\sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k}}$$

arányban kell elosztani. Ezt úgy tudjuk egyszerűen kiszámolni, hogy a Pascal-háromszög $(a+b-1)$-edik sorában összeadjuk az elemeket az a-adiktól az $(a+b-1)$-edikig, majd az eredményt elosztjuk a 0-adiktól az $(a-1)$-edik elemig vett összeggel.

A kiinduló példánkban Annának 2 pont Balázsnak 3 pont hiányzott a győzelemhez. Tehát a tétet

$$\frac{P_A(2, 3, 1/2)}{P_B(3, 2, 1/2)} = \frac{6+4+1}{1+4} = \frac{11}{5}$$

arányban kell elosztani.

3. Feltételes valószínűség és függetlenség

3.1. Feltételes valószínűség

Két szabályos dobókockával dobunk. Az első kockával hatost dobtunk, a második kocka elgurult. Mennyi a valószínűsége, hogy dupla hatost dobtunk? Jelölje A azt az eseményt, hogy az első kockával hatost dobtunk, B pedig azt, hogy mindkét kockával ugyanazt dobtuk. Tudjuk, hogy az A esemény bekövetkezett, azaz a kísérlet kimeneteléről van egy részinformációnk. Ekkor az eseménytér azon részhalmazán dolgozunk, ahol az adott A esemény bekövetkezett, azaz A-n. Ekkor a kedvező esetek száma $|A \cap B|$ és az összes esetek száma $|A|$. Tehát a keresett valószínűség $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$. Éppen ez a feltételes valószínűség definíciója.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, és ezen A, B események, és tegyük föl, hogy $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A **esemény** B **eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége**

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$.

3.1. Állítás. *Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$-n.*

Bizonyítás. Világos, hogy tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}_B(A) \geq 0$, és mivel $\mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B)$, így $\mathbf{P}_B(A) \leq 1$. Továbbá

$$\mathbf{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

Már csak az additivitás ellenőrzése maradt. Legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ diszjunktak. Ekkor a definíció szerint és a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték additivitása alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_B(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbf{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) &= \frac{\mathbf{P}\left((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B\right)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbf{P}(B)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_B(A_i),
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség. □

Ebből következik, hogy $\mathbf{P}_B$ halmazfüggvényre is teljesülnek a valószínűségi mérték tulajdonságai, melyeket a későbbiekben említés nélkül fölhasználunk.

3.2. Tétel (Szorzási szabály)**.** *Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

A bizonyítás előtt megjegyezzük a következőket:

1. A formulában szereplő összes feltétel valószínűsége pozitív, azaz minden jóldefiniált. Ez a $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ feltétel következménye.
2. Ha $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$ is teljesül, akkor $n!$ darab különböző ilyen szabály van.
3. A szabályt az $n = 2$ esetben használjuk legtöbbször. Ekkor

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B),$$

amennyiben A és B is pozitív valószínűségű esemény.

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1)\frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1)}\frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)} \ldots \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n),
\end{aligned}$$

amint állítottuk. □

3.3. *Példa.* Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?

Jelölje K_i az az eseményt, hogy az i-ediknek kihúzott golyó kék. Ekkor a szorzási szabály szerint

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) = \mathbf{P}(K_1)\mathbf{P}(K_2|K_1) = \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}.$$

Ugyanezt kapjuk a klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó kedvező/összes formulával is, mely szerint

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{15}{2}}.$$

A $B_1, B_2, \ldots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha

- minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

3.4. Tétel (Teljes valószínűség tétele)**.** *Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n-re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója és a valószínűség additivitása alapján

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{P}(A\cap B_n}{\mathbf{P}(B_n)}\cdot\mathbf{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A\cap B_n)\\ &= \mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\right) = \mathbf{P}\left(A\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)\\ &= \mathbf{P}(A\cap\Omega) = \mathbf{P}(A).\end{aligned}$$

□

3.5. Tétel (Bayes-formula)**.** *Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B|A).$$

□

3.6. Tétel (Bayes-tétel)**.** *Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n-re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k-ra*

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

Bizonyítás. Előbb a teljes valószínűség tételét, majd a Bayes-formulát használva

$$\frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B_k|A).$$

□

3.7. *Példa. Doppingteszt.* Kifejlesztenek egy új doppingtesztet, mely a doppingolók 99%-ánál pozitív eredményt ad, azonban a nem doppingoló sportolók 1%-nál is tévesen pozitív eredményt ad. Tegyük föl, hogy a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

(a) doppingtesztje pozitív?

(b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

Jelölje T azt az eseményt, hogy a teszt eredménye pozitív, és D azt az eseményt, hogy a sportoló doppingolt. Ekkor a feladat (a) része a $\mathbf{P}(T)$, a (b) része a $\mathbf{P}(D|T)$ valószínűséget kérdezi. A teljes valószínűség tételét alkalmazva a D, D^c eseményrendszerre kapjuk

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T) &= \mathbf{P}(D)\mathbf{P}(T|D) + \mathbf{P}(D^c)\mathbf{P}(T|D^c)\\ &= 0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,01 = 0,0198.\end{aligned}$$

A Bayes-formula szerint

$$\mathbf{P}(D|T) = \frac{\mathbf{P}(T|D)\mathbf{P}(D)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{0,99 \cdot 0,01}{0,0198} = \frac{1}{2}.$$

A feladat eredménye meglepő, hiszen egy látszólag jól működő teszt esetén, annak a valószínűsége, hogy egy sportoló tényleg doppingolt, feltéve, hogy a teszt eredménye pozitív, $1/2$. Világos, hogy ilyen tesztelés mellett nem vehetjük el senkitől az olimpiai aranyérmét. A hiba onnan jön, hogy ha 100 sportolóból 1 doppingol, akkor a teszt ezt az 1-et nagy valószínűséggel kimutatja, viszont a 99 becsületes sportoló közül is kb. egyet tévesen a doppingolók közé sorol. Így kb. két pozitív teszteredmény lesz, de a két sportoló közül csak az egyik doppingol.

3.8. *Példa.* Egy hallgató p valószínűséggel tudja a választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor az n lehetséges válasz közül véletlenül választ egyet. Mennyi legyen a lehetséges válaszok n száma, hogy az oktató legalább $0,9$ valószínűséggel következtethessen arra a hallgató jó válaszából, hogy a hallgató tudta a választ?

Jelölje H azt az eseményt, hogy a hallgató jól válaszol, T pedig azt az eseményt, hogy tudja a választ. Ekkor olyan n értéket keresünk, melyre teljesül a $\mathbf{P}(T|H) > 0,9$ egyenlőtlenség. Tehát a

$$\mathbf{P}(T|H) = \frac{\mathbf{P}(H|T)\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(H|T)\mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(H|T^c)\mathbf{P}(T^c)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{n} \cdot (1-p)} \geq 0,9,$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk n-re. Rövid számolás után adódik, hogy $n \geq 9(1-p)/p$. Azaz $p = 1/2$ esetén az oktatónak legalább 9 lehetséges választ, míg $p = 0,7$ esetén legalább 4 lehetséges választ kell megadnia.

Vegyük észre, hogy ahogy p tart 0-hoz, az oktató bizonyosságához szükséges lehetséges válaszok száma tart végtelenbe. Gondoljuk meg mért természetes ez.

3.9. *Példa.* Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

Tegyük fel, hogy egyértelmű szigorúan monoton szépségi sorrendet tud felállítani, és a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyformán valószínű. Szindbád k hölgyet elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál. Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a i-edik lány a legszebb, $i = 1, 2, \ldots, N$, és legyen B az az esemény, hogy Szindbád a legszebb lányt választja. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B|A_i).$$

Világos, hogy $\mathbf{P}(A_i) = N^{-1}$ minden i-re, és $\mathbf{P}(B|A_i) = 0$ ha $i \leq k$. Ha $i > k$, akkor Szindbád pontosan akkor választja ki a legszebb háremhölgyet, ha az első $i-1$ lány közül a legszebb az első k-ban volt. Tehát $\mathbf{P}(B|A_i) = k/(i-1)$. Összegezve

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B|A_i) = \sum_{i=k+1}^{N} \frac{1}{N}\frac{k}{i-1}.$$

3.2. Függetlenség

Két esemény függetlensége intuitívan azt jelenti, hogy bekövetkezéseik nem befolyásolják egymást. Tekintsünk egy adott kísérlethez tartozó A és B eseményt. Ismételjük n-szer a kísérletet. Ekkor $S_n(A)/n$ az A esemény relatív gyakorisága az n kísérlet során. Most figyeljük csak azokat a kísérleteket, ahol B bekövetkezett, ezek száma $S_n(B)$. Ezek közül $S_n(A \cap B)$ azon kísérletek száma, ahol A is bekövetkezett, így a megfelelő relatív gyakoriság $S_n(A \cap B)/S_n(B)$. Az, hogy A és B nem befolyásolják egymást, azt jelenti, hogy ez a két relatív gyakoriság kb. megegyezik, azaz

$$\frac{S_n(A)}{n} = \frac{S_n(A \cap B)}{S_n(B)} = \frac{S_n(A \cap B)/n}{S_n(B)/n}.$$

A bal oldal kb. $\mathbf{P}(A)$, a jobb oldal pedig $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, vagyis azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Ez a függetlenség definíciója.

Másképpen, a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, azaz $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

3.10. Definíció. Az A és B események **függetlenek**, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

A definícióból világos, hogy a függetlenség szimmetrikus. Továbbá, a biztos ill. a lehetetlen eseménytől minden esemény független.

3.11. *Példa.* Francia kártyapakliból véletlenszerűen húzunk egy lapot. Jelölje D azt az eseményt, hogy dámát húzunk, K pedig azt, hogy kőrt. Ekkor $D \cap K$ az az esemény, hogy a kőr dámát húztuk ki, így $\mathbf{P}(D \cap K) = 1/52$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(D) = 4/52 = 1/13$ és $\mathbf{P}(K) = 13/52 = 1/4$, azaz a két esemény független.

3.12. *Példa.* Földobunk n-szer egy szabályos érmét. Legyen A az az esemény, hogy legfeljebb egy fejet dobunk, B pedig az, hogy legalább egy fejet és egy írást dobunk.

Ekkor $\mathbf{P}(A) = (n+1)/2^n$, $\mathbf{P}(B) = 1 - 2/2^n$, és $\mathbf{P}(A \cap B) = n/2^n$. Azaz A és B pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{n+1}{2^n} \frac{2^n - 2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = \mathbf{P}(A \cap B)$$

teljesül. Innen kis számolgatással kapjuk, hogy A és B függetlenek, ha $n = 3$, különben pedig nem azok.

3.13. Definíció. Az A, B, C események **függetlenek**, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ teljesül. Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

3.14. *Példa.* Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot a $[0,1]^2$ egységnégyzetben. Legyen A az az esemény, hogy a választott pont a $[0,1] \times [0,1/2]$ téglalapba esik, B az az esemény, hogy a választott pont az $[1/2,1] \times [0,1]$ téglalapba esik, C pedig az az esemény, hogy a választott pont a $[0,1/2]^2 \cup [1/2,1]^2$ halmazba esik. Könnyen ellenőrizhető, hogy A, B, C páronként függetlenek, de *nem* függetlenek.

3.15. Definíció. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ és $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

3.16. Állítás. *Ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az $\{A_1, \dots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.*

Ezt nem bizonyítjuk. Az állítás szerint például ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek.

3.17. Állítás. *Független események közül ha néhányat kicserélünk a komplementerére, akkor is független eseményeket kapunk.*

Bizonyítás. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ függetlenek. Nyilván elég megmutatni, hogy $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ is függetlenek. Hiszen ekkor egyesével kicserélhetünk akárhány eseményt. A definíciót elég az $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ esetben ellenőrizni, hiszen ha A_1^c nincs a kiválasztott események közt, akkor a feltevés szerint teljesül a függetlenség. Ekkor viszont, előbb a mérték tulajdonsága, majd a függetlenség miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1^c \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \mathbf{P}(A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\
&= [1 - \mathbf{P}(A_1)]\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\
&= \mathbf{P}(A_1^c)\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}),
\end{aligned}$$

amit igazolni kellett. □

Kísérletek függetlenségéről akkor beszélünk, ha a hozzájuk tartozó események függetlenek.

3.3. Craps játék

A craps játékot és annak változatait jelenleg is játsszák kaszinókban. A játék az Egyesült Államokban népszerű, 1820 körül terjedt el New Orleansban.

A játékos két dobókockával dob. Ha az első dobásnál a dobott számok összege 7 vagy 11, akkor azonnal nyer, ha 2,3 vagy 12 akkor veszít. Különben folytatja a dobásokat, és akkor nyer, ha hamarabb dobja meg azt az összeget, amit elsőre dobott, mint a 7-et.

A következőkben meghatározzuk a nyerés valószínűségét.

Jelölje A azt az eseményt, hogy nyerünk, A_i pedig azt, hogy az első dobás eredménye i, és nyerünk. Világos, hogy $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_{12}) = 0$, továbbá

$$\mathbf{P}(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(A_{11}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

hiszen ezekben az esetekben a játék az első dobás után véget ér. Ha az első dobásnál az összeg $4, 5, 6, 8, 9$ vagy 10 akkor a dolog érdekesebb. Jelölje $A_{i,n}$ azt az eseményt, hogy az első dobásnál az összeg i és pontosan az n-edik dobásnál nyerünk. Nyilván $A_i = \cup_{n=2}^{\infty} A_{i,n}$, és az unió diszjunkt.

Tekintsük az $A_{4,n}$ eseményt. Ekkor az első dobásnál az összeg 4, ami 3 féleképpen következhet be $((1,3),(2,2),(3,1))$, és mivel nyertünk, az utolsó dobásnál is 4 az összeg. A közbülső $n-2$ dobás során nem dobtunk 4-et, és 7-et, hiszen ekkor véget ért volna a játék korábban. Így $3+6$ esetet zártunk ki. Ezek szerint

$$\mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{3\cdot(36-9)^{n-2}\cdot 3}{36^n} = \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}.$$

Innen pedig geometria sort összegezve, kapjuk

$$\mathbf{P}(A_4) = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2} = \frac{1}{36}.$$

A többi eset hasonlóan megy,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{4,n}) = \mathbf{P}(A_{10,n}) &= \frac{9}{36^2}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-2} \\
\mathbf{P}(A_{5,n}) = \mathbf{P}(A_{9,n}) &= \frac{16}{36^2}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-2} \\
\mathbf{P}(A_{6,n}) = \mathbf{P}(A_{8,n}) &= \frac{25}{36^2}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},
\end{aligned}$$

majd a megfelelő geometriai sorokat összegezve

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_{10}) &= \frac{1}{36}, \\
\mathbf{P}(A_5) = \mathbf{P}(A_9) &= \frac{2}{45}, \\
\mathbf{P}(A_6) = \mathbf{P}(A_8) &= \frac{25}{396}.
\end{aligned}$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=2}^{12}\mathbf{P}(A_i) = \frac{244}{495} \approx 0,493.$$

4. Véletlen változók

4.1. Definíció. Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

függvényeket *véletlen változónak* nevezzük, ha a

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega : X(\omega) \le a\}$$

inverzkép $\mathcal{A}$-beli tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén.

Már sok példát láttunk véletlen változóra. Ilyen például a dobókockával dobott szám értéke, vagy ha három kockával dobunk, akkor a legkisebb dobott szám. Ilyen az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám, vagy az egy szelvényen elért találatok száma. Véletlen változó az is, hogy a ropi hol törik el, vagy az egységnégyzetben egyenletesen választott pont milyen távol van a négyzet határától, stb.

4.2. Definíció. Az X véletlen változó *eloszlásfüggvénye* az

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \le x\}),\ x \in \mathbb{R},$$

függvény.

4.3. *Példa.* Dobókockával dobunk. Jelölje X a dobott értéket. Ekkor a lehetséges kimenetelek halmaza $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, az események halmaza $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Szabályos a kockánk, ezért minden értéket 1/6-od valószínűségggel dobutnk, azaz $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{6}$, (klasszikus valószínűségi mező). A dobott szám $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \omega$, azaz az identikus leképezés. Ezért

$$\{X \le x\} = \{\omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } x < 1, \\ \{1, 2, \ldots, [x]\}, & \text{ha } 1 \le x \le 6, \\ \{1, 2, \ldots, 6\}, & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$

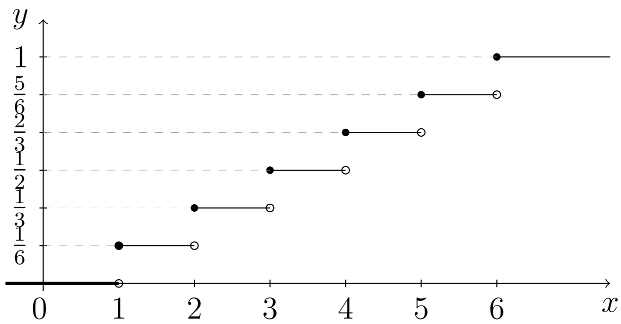
Így az eloszlásüggvény

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \le x\}) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{[x]}{6}, & 1 \le x \le 6, \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

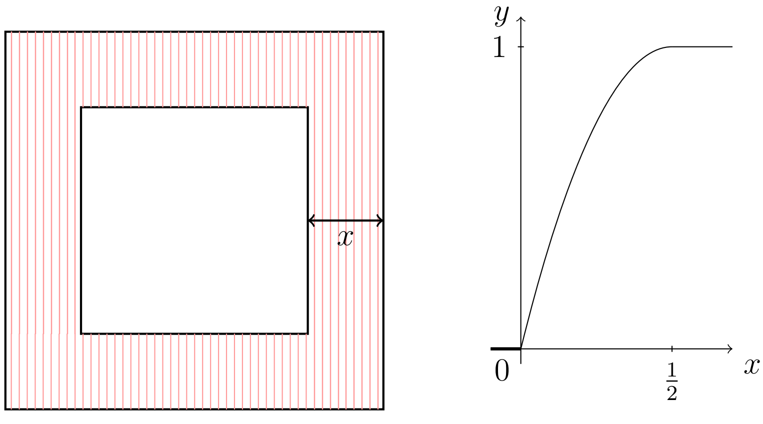
4.4. *Példa.* Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

Jelölje X a távolságot. Ekkor geometriai valószínűségi mezőn vagyunk, $\Omega = [0, 1]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1]^2)$, és $\mathbf{P}(A) = |A|$, ahol $|\cdot|$ a terület. Könnyen látható, hogy $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \min\{u, v, 1 - u, 1 - v\}$, így

$$\begin{aligned} \{X \le x\} &= \{\omega : X(\omega) \le x\} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & x < 0, \\ \{(u, v) : \min\{u, v, 1 - u, 1 - v\} \le x\}, & 0 \le x \le 1/2, \\ [0, 1]^2, & x \ge 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$



4. ábra. Dobott szám eloszlásfüggvénye



5. ábra. A jó terület és az eloszlásfüggvény

Azaz

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \le x\}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1-x), & \text{ha } 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & \text{ha } x \ge 1/2, \end{cases} \end{aligned}$$

4.5. Tétel. *Legyen $F(x)$ egy X véletlen változó eloszlásfüggvénye. Ekkor*

(i) F monoton nemcsökkenő;

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ és $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

(iii) F jobbról folytonos.

Bizonyítás. (i) Ha $x_1 < x_2$ akkor $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ és így a mérték monotonitása miatt $F(x_1) = \mathbf{P}(X \le x_1) \le \mathbf{P}(X \le x_2) = F(x_2)$.

(ii) A monotonitásból következik, hogy $\lim_{x\to\infty} F(x)$ létezik, így elég belátni, hogy $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$. Tekintsük az $A_n = \{X \le n\} = \{\omega : X(\omega) \le n\}$ halmazokat. Ekkor $F(n) = \mathbf{P}(A_n)$. Világos, hogy (A_n) monoton bővülő halmazsorozat, azaz $A_n \subset A_{n+1}$. Ugyanakkor $\cup A_n = \{X < \infty\} = \Omega$, és ezért

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

A másik határérték igazolásához is elég részsorozaton dolgozni a monotonitás miatt. Legyen $B_n = \{X \le -n\}$. Ekkor $F(-n) = \mathbf{P}(B_n)$, a (B_n) halmazsorozat monoton csökkenő, és $\cap B_n = \{X \le -\infty\} = \emptyset$. Ezért (ismét a mértékek folytonossági tétele szerint)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

Végül, a (iii) pont belátásához is hasonlóan okoskodunk. Jelölje $F(x+)$ az x pontban vett jobboldali határértéket. Ez megint létezik a monotonitás miatt. Tekintsük a $C_n = \{X \le x + n^{-1}\}$ halmazokat. Ekkor (C_n) csökkenő halmazsorozat, és $\cap C_n = \{X \le x\}$. Így ismét a folytonossági tétel szerint

$$F(x+) = \lim_{n\to\infty} F(x + n^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} C_n) = \mathbf{P}(X \le x) = F(x).$$

□

Vegyük észre, hogy F monotonitásából következik az $F(x-)$ baloldali határérték létezése is, azonban általában az $F(x) = F(x-)$ egyenlőség nem teljesül. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy $F(x-) = \mathbf{P}(X < x)$, továbbá

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X < x) + \mathbf{P}(X = x) = F(x-) + \mathbf{P}(X = x).$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy F pontosan akkor folytonos az x pontban, ha $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

A definícióból adódik, hogy $a < b$ esetén $\mathbf{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.

4.1. Diszkrét véletlen változók

4.6. Definíció. Egy véletlen változó *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Ha egy diszkrét véletlen változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, akkor $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Ha (p_i) eloszlás, akkor $\sum_i p_i = 1$. Az eloszlásfüggvény $F(x) = \sum_{i:x_i \le x} p_i$.

4.7. *Példa.* Legyen $X = I_A$ az A esemény indikátorváltozója. Azaz

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A, \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

Ekkor X lehetséges értékei 0 és 1, és $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(A) = p = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$. Ő a p paraméterű Bernoulli eloszlás.

4.8. *Példa.* Legyen $X = S_n$, egy kísérlet n-szeri ismétlése során az A esemény bekövetkezéseinek a száma. Ekkor X lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $p = \mathbf{P}(A) \in (0, 1)$. Ő az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás.

4.9. *Példa.* Egy kísérletet addig ismétlünk, amíg egy adott A esemény be nem következik. Legyen X az elvégzett kísérletek száma. Ekkor X lehetséges értékei $1, 2 \ldots$, és $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Ő a p paraméterű geometria eloszlás.

4.2. Folytonos véletlen változók

Egy véletlen változó értékkészlete nem feltétlenül megszámlálható. A ropi például bárhol eltörhet. Vagy gondolhatunk tetszőleges mérés eredményére, élettartamra, ... Ilyenkor a változó kontinuum sok értéket vehet fel, mindegyiket 0 valószínűséggel. Ez a mese, a definíció a következő.

4.10. Definíció. Egy X véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény az X véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy $\mathbf{P}(X \in (a, b)) = \mathbf{P}(X \in (a, b]) = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$, $-\infty \le a \le b \le \infty$. Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(X = x) = \int_{x}^{x} f(y)\mathrm{d}y = 0.$$

4.11. *Példa.* A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Az eloszlásfüggvény $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) \mathrm{d}y$.

4.3. Véletlen vektorváltozók

Egy kísérletnél sokszor több a kísérlet eredményét leíró adatra vagyunk kíváncsiak. Például testtömeg, testmagasság, vérnyomás, pulzus, ...

4.12. Definíció. Az $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvény véletlen vektorváltozó, ha minden komponense véletlen változó. Az X eloszlásfüggvénye

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

Az $(X_1, \ldots, X_n)$ véletlen vektorváltozó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható, és folytonos, ha van olyan f nemnegatív n-változós függvény, melyre

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_n \ldots \mathrm{d}y_1$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ilyenkor az f függvényt az X vektorváltozó sűrűségfüggvényének nevezzük.

Az X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, változók eloszlását, peremeloszlásnak, vagy marginális eloszlásnak nevezzük.

Folytonos eseteben a definícióból világos, hogy az egyváltozós eset analógiájára

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

teljesül. Az $x_i \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ határátmenettel azt is látjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = 1,$$

mint az egyváltozós esetben.

4.13. Állítás. *Legyen $X = (X_1, \ldots, X_n)$ véletlen vektorváltozó. Az X_i eloszlásfüggvénye*

$$F_i(x) = \lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_{i-1} \to \infty, x_{i+1} \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$A_m = \{\omega : X_j(\omega) \leq m, j \neq i, X_i \leq x\}, \ m \geq 1,$$

halmazokat. Ekkor az (A_m) halmazsorozat monoton bővülő, és

$$\cup_{m=1}^{\infty} A_m = \{\omega : X_i \leq x\}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} F(m, \ldots, m, x, m, \ldots, m) &= \lim_{m \to \infty} \mathbf{P}(A_m) \\ &= \mathbf{P}(X_i \leq x) = F_i(x). \end{aligned}$$

A koordinátánkénti monotonitásból az állítás következik. □

4.14. Állítás. *Legyen $X = (X_1, \dots, X_n)$ folytonos véletlen vektorváltozó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X_i, $i = 1, 2, \dots, n$, folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye*

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{i-1} \mathrm{d}y_{i+1} \dots \mathrm{d}y_d,$$

azaz az i-edik változón kívül minden változót kiintegrálunk $\mathbb{R}$-en.

Bizonyítás. Legyen f_i az állításban szereplő függvény. Ekkor a szukcesszív integrálásra vonatkozó tétel szerint

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f_i(y) \mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{x} \Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_n) \\
&\qquad\qquad \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{i-1} \mathrm{d}y_{i+1} \dots \mathrm{d}y_n \Bigg] \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_n) \\
&\qquad\qquad \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{i-1} \mathrm{d}y \mathrm{d}y_{i+1} \dots \mathrm{d}y_n \\
&= \lim_{x_1 \to \infty, \dots, x_{i-1} \to \infty, x_{i+1} \to \infty, x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&= \mathbf{P}(X_i \le x),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségnél fölhasználtuk a 4.13 Állítást. Tehát

$$\int_{-\infty}^{x} f_i(y) \mathrm{d}y = \mathbf{P}(X_i \le x),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

4.15. Állítás. *Legyen $f(u, v)$ az (X, Y) véletlen vektor sűrűségfüggvénye. Ekkor X és Y is folytonos véletlen változók $\int_{\mathbb{R}} f(u, v) \mathrm{d}v$ ill. $\int_{\mathbb{R}} f(u, v) \mathrm{d}v$ sűrűségfüggvénnyel.*

Bizonyítás. A sűrűségfüggvény definíciója szerint

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X \le x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

□

4.4. Véletlen változók függetlensége

Legyenek $X_1, \dots, X_n$ az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változók.

4.16. Definíció. Az $X_1, \dots, X_n$ függetlenek, ha minden $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \mathbf{P}(X_1 \le x_1) \dots \mathbf{P}(X_n \le x_n)$$

teljesül. Vagyis az együttes eloszlásfüggvény az egyes eloszlásfüggvények szorzata.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, akkor tetszőleges $B_1, \ldots, B_n$ véges vagy végtelen intervallumok esetén

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \ldots \mathbf{P}(X_n \in B_n)$$

teljesül.

A diszkrét, illetve a folytonos esetben ez a karakterizáció tovább egyszerűsíthető.

4.17. Állítás. *Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ diszkrét véletlen változók úgy, hogy X_i lehetséges értékei $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $X_1, \ldots, X_n$ pontosan akkor függetlenek, ha*

$$\mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \ldots, X_n = x_{i_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}) \ldots \mathbf{P}(X_n = x_{i_n}^{(n)})$$

teljesül tetszőleges $i_i, \ldots, i_n$ indexekre.

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ együttesen folytonos véletlen változók f együttes sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $X_1, \ldots, X_n$ pontosan akkor függetlenek, ha

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n),$$

ahol f_{X_i} az X_i sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. A diszkrét esetben csak ki kell írni a függetlenség definícióját.

A folytonos esetben csak $n = 2$ esetén bizonyítunk. Az általános eset ugyanez, csak macerásabb a jelölés. Ha a sűrűségfüggvény faktorizálódik, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \le x, Y \le y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f_Y(v) \mathrm{d}v = \mathbf{P}(X \le x)\, \mathbf{P}(Y \le y),
\end{aligned}$$

azaz a változók függetlenek. Megfordítva, tegyük fel, hogy a változók függetlenek. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \le x, Y \le y) &= \mathbf{P}(X \le x)\, \mathbf{P}(Y \le y) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{y} f_Y(v) \mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

azaz $f_X(u) f_Y(v)$ az együttes sűrűségfüggvény, amint állítottuk. $\square$

4.5. Függetlenség és geometriai valószínűség

4.18. Definíció. Legyen $T = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$ egy n-dimenziós tégla, ahol $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Az $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to T$ egyenletes eloszlású véletlen változó T-n, ha tetszőleges $S = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$ résztéglájára T-nek

$$\mathbf{P}(X \in S) = \frac{(d_1 - c_1) \ldots (d_n - c_n)}{(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)}.$$

Ekkor X indukál egy geometriai valószínűségi mezőt.

4.19. Állítás. *Az $X = (X_1, \ldots, X_n)$ véletlen vektorváltozó pontosan akkor egyenletes eloszlású a $T = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ téglán, ha minden i-re X_i egyenletes eloszlású $[a_i, b_i]$-n, és $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek.*

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Legyen $S = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \in S) &= \mathbf{P}(X_1 \in [c_1, d_1], \ldots, X_n \in [c_n, d_n]) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \in [c_i, d_i]) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i - c_i}{b_i - a_i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n}(d_i - c_i)}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Legyen $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \le c_i < d_i \le b_i$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_i \in [c_i, d_i]) &= \mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], \ldots, X_i \in [c_i, d_i], \ldots, X_n \in [a_n, b_n]) \\ &= \mathbf{P}(X \in [a_1, b_1] \times \ldots \times [c_i, d_i] \times \ldots \times [a_n, b_n]) \\ &= \frac{(d_i - c_i) \prod_{j \neq i}(b_j - a_j)}{\prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)} = \frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}.\end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható a függetlenség az intervallumok esetén, ahonnan pedig következik általánosan. □

5. Várható érték

Egy kísérletet n-szer függetlenül ismétlünk és minden alkalommal megfigyeljük X értékét: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ezen értékek átlagai egy számhoz tartanak, ez lesz $\mathbf{E}X$.

Motiváció

5.1. Definíció. Ha X diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az X *várható értéke*

$$\mathbf{E}X = \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(X = x_i) < \infty$.

Ha X folytonos véletlen változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor az X várható értéke

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) \mathrm{d}y,$$

ha $\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) \mathrm{d}y < \infty$.

Folytonos eset magyarázata h hosszúságú intervallumokkal.

5.1. Várható érték tulajdonságai

5.2. Állítás. *Legyenek X, Y véletlen változók, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre az állításokban szereplő várható értékek léteznek. Ekkor*

$$\mathbf{E}g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbf{P}(X = x_i), \text{ ill. } \mathbf{E}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)\mathrm{d}y,$$

ahol $f(x)$ az X sűrűségfüggvénye, és

$$\begin{aligned}\mathbf{E}h(X,Y) &= \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j), \text{ ill.}\\ \mathbf{E}h(X,Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

ahol $f(x, y)$ az (X, Y) folytonos véletlen vektorváltozó sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. Csak az első állítást igazoljuk és csak diszkrét esetben. Mivel X diszkrét, ezért $g(X)$ is diszkrét $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}g(X) &= \sum_j y_j \mathbf{P}(g(X) = y_j)\\ &= \sum_j y_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} \mathbf{P}(X = x_i)\\ &= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} y_j \mathbf{P}(X = x_i)\\ &= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i)\mathbf{P}(X = x_i)\\ &= \sum_i g(x_i)\mathbf{P}(X = x_i).\end{aligned}$$

□

5.3. Állítás. *A következőkben a, b valós konstansok, $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ véletlen változók.*

(i) A várható érték lineáris, azaz tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ állandókra

$$\mathbf{E}aX + b = a\mathbf{E}X + b.$$

(ii) Ha $a \le X \le b$, akkor $a \le \mathbf{E}X \le b$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén.

(iii) $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.

(iv) Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véletlen változók, akkor

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i.$$

(v) Ha X és Y függetlenek, *akkor $\mathbf{E}g_1(X)g_2(Y) = \mathbf{E}g_1(X)\mathbf{E}g_2(Y)$. Speciálisan, ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}XY = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$.*

Bizonyítás. (i) Az előző állítást $g(x) = ax + b$ függvénnyel felírva

$$\mathbf{E}(aX + b) = \sum_i (ax_i + b)\mathbf{P}(X = x_i) = a\mathbf{E}X + b.$$

Folytonosra ugyanígy.

(ii)

$$a = a\sum_i \mathbf{P}(X = x_i) \le \sum_i x_i\mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{E}X \le \sum_i b\mathbf{P}(X = x_i) = b.$$

Folytonosra ugyanígy.

(iii) Az 5.2 Állítást $h(x, y) = x + y$ függvénnyel felírva

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X + Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j)\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_j y_j \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{tvt} \\
&= \sum_i x_i\mathbf{P}(X = x_i) + \sum_j y_j\mathbf{P}(Y = y_j) \\
&= \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.
\end{aligned}$$

Csak diszkrét esetben bizonyítunk.

(iv) Következik (iii)-ból teljes indukcióval.

(v) Az 5.2 Állítást $h(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ függvénnyel felírva

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g_1(X)g_2(Y)) &= \sum_i \sum_j g_1(x_i)g_2(y_j)\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_i \sum_j g_1(x_i)g_2(y_j)\mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j) \quad \text{függetlenség} \\
&= \sum_i g_1(x_i)\mathbf{P}(X = x_i) \sum_j g_2(y_j)\mathbf{P}(Y = y_j) \\
&= \mathbf{E}(g_1(X))\mathbf{E}(g_2(Y)).
\end{aligned}$$

A folytonos esetben

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g_1(X)g_2(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y)f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{{\scriptsize függetlenség}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f_1(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)f_2(y)\mathrm{d}y \quad \text{{\scriptsize szukcesszív integrálás}} \\
&= \mathbf{E}(g_1(X))\mathbf{E}(g_2(Y)).
\end{aligned}$$

□

5.4. *Példa.* Csodaország munka törvénykönyve szerint egy cég minden munkása fizetett szabadságot kap azokon a napokon, amikor legalább az egyiküknek születésnapja van. Ezen napok kivételével azonban az év minden napján mindenkinek dolgoznia kell. Minden munkás 1 TV-készüléket készít egy nap alatt. Hány alkalmazottat vegyen fel a cégtulajdonos, ha azt akarja, hogy a gyártott TV-készülékek számának a várható értéke maximális legyen?

Legyen n az alkalmazottak száma. Jelölje X_n az egy évben gyártott TV-k számát, és legyen Y_i az i-edik napon gyártott TV-k száma, $i = 1, 2, \ldots, 365$. Világos, hogy

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{365}.$$

Másrészt Y_i-k azonos eloszlásúak, lehetséges értékeik n vagy 0, és

$$\mathbf{P}(Y_i = n) = \mathbf{P}(\text{nincs születésnap az } i\text{-edik napon}) = \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Tehát

$$\mathbf{E}(X_n) = 365\,n\left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{E}(X_n)}{\mathbf{E}(X_{n+1})} \le 1 \;\Leftrightarrow\; n \le 364,$$

azaz a maximum az $n = 364$ és $n = 365$ helyeken vétetik fel.

5.5. Definíció. Az X véletlen változó k-adik momentuma $\mathbf{E}(X^k)$, és k-adik centrális momentuma $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^k]$, $k = 1, 2, \ldots$. Az 5.2 Állítás szerint

$$\mathbf{E}(X^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k \mathbf{P}(X = X_i), & \text{ha } X \text{ diszkrét},\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x, & \text{ha } X \text{ folytonos}.\end{cases}$$

5.2. Szórás, kovariancia, korreláció

5.6. Definíció. Az X véletlen változó szórása $\mathbf{D}(X) = \sqrt{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2}$.

A szórás annak a mérőszáma, hogy a változó mennyire tér el a várható értékétől. Mivel $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) = 0$, $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}(X)|$ pedig nehezen kezelhető (nem differenciálható az $|\cdot|$ függvény), ezért ez a legegyszerűbb ilyen.

5.7. Állítás. *Tetszőleges X véletlen változó és a, b valós számok esetén*

(i) $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$*;*

(ii) $\mathbf{D}^2(aX + b) = a^2\mathbf{D}^2(X)$*;*

(iii) $\mathbf{D}(X) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $X = \mathbf{E}(X)$*, azaz X konstans véletlen változó.*

Bizonyítás. A definíció alkalmazása. □

Véletlen változók függőségének mérőszámai a kovariancia és a korreláció.

5.8. Definíció. Az X és Y véletlen változók *kovarianciája*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))],$$

korrelációja

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)}.$$

A kovariancia egyszerű tulajdonságai:

5.9. Állítás. *Tetszőleges $X, X_1, \ldots, X_n, Y, Y_1, \ldots, Y_m$ véletlen változók és a, b valós számok esetén igazak az alábbiak.*

(i) $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{D}^2(X)$*;*

(ii) $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$*;*

(iii) $\mathbf{Cov}(aX, bY) = ab\mathbf{Cov}(X, Y)$*;*

(iv) $\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{Cov}(X_i, Y_j)$*;*

(v) ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

5.10. Állítás. *(i) Bunyakovszkij–Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség:*

$$|\mathbf{Cov}(X, Y)| \le \mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y),$$

ahonnan adódik, hogy $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$*;*

(ii) ha $\rho(X,Y)=1$, akkor

$$X = \mathbf{E}(X) + \frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y));$$

(iii) ha $\rho(X,Y)=-1$, akkor

$$X = \mathbf{E}(X) - \frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y)).$$

Bizonyítás. (i): Tekintsük az $U+tV$ véletlen változót, ahol t egy valós szám. Mivel $\mathbf{E}[(U+tV)^2] \geq 0$, ezért a

$$p(t) = \mathbf{E}[(U+tV)^2] = t^2\mathbf{E}(V^2) + 2t\mathbf{E}(UV) + \mathbf{E}(U^2) \tag{1}$$

t-ben másodfokú polinom diszkriminánsa nempozitív. Azaz

$$4[\mathbf{E}(UV)]^2 \leq 4\mathbf{E}(U^2)\mathbf{E}(V^2), \tag{2}$$

amiből következik, hogy

$$|\mathbf{E}(UV)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(U^2)\mathbf{E}(V^2)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget az $U = X - \mathbf{E}(X)$ és $V = Y - \mathbf{E}(Y)$ változókra felírva kapjuk az állítást.

(ii) és (iii): Ha $|\rho(X,Y)| = 1$, akkor a (2) egyenlőtlenség $U = X - \mathbf{E}(X)$ és $V = Y - \mathbf{E}(Y)$ változókra egyenlőség, azaz a másodfokú p polinom diszkriminánsa 0. Ezek szerint

$$t_0 = -\frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)]}{\mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}Y)^2]} = -\rho(X,Y)\frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}$$

zérushely, vagyis

$$X - \mathbf{E}(X) + t_0(Y - \mathbf{E}(Y)) = 0,$$

ami éppen a bizonyítandó. □

Megjegyzés. Korreláció jelentése. Ha $\rho(X,Y) = 0$, akkor X és Y *korrelálatlanok.* Az 5.9 Állítás (v) pontja szerint a függetlenségből következik a korrelálatlanság. Fordítva ez nem igaz, könnyű ellenpéldát gyártani. Mindenesetre, minél kisebb a korreláció annál gyengébb a két változó közötti függés. Az 5.10 Állításból pedig azt látjuk, hogy minél közelebb van $|\rho(X,Y)|$ értéke 1-hez, annál erősebb a változók közötti függés.

Ha a korreláció pozitív, akkor ha X nagy, akkor Y is nagy, ha pedig negatív, akkor ha X nagy, akkor Y kicsi, és fordítva. Ezek a megállapítások persze nem tehetők nagyon precízzé, ez a szemléletes jelentés.

5.11. Állítás. *Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ páronként független véletlen változók. Ekkor*

$$\mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}^2(X_i).$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

5.12. *Példa.* Egy szabályos dobókockával n-szer dobunk. Jelölje X a hatosok, Y egyesek számát! Legyen $I_i = 1$, ha az i-edik dobás hatos, különben 0, $J_i = 1$, ha az i-edik dobás egyes, különben 0, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nyilván

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \text{és} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} J_i. \tag{3}$$

Továbbá $I_1, \ldots, I_n$ függetlenek, és $J_1, \ldots, J_n$ is függetlenek.

Ekkor $I_1, \ldots, I_n$ független, *Bernoulli eloszlású* véletlen változók 1/6 paraméterrel. A megfelelő eloszlás $\mathbf{P}(I_i = 1) = 1/6$, $\mathbf{P}(I_i = 0) = 5/6$. A J-kre hasonlóan. A hatosok száma X *binomiális eloszlású* véletlen változó $(n, 1/6)$ paraméterrel. Eloszlása

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

A várható értéket és a szórást a definíció alapján számolhatjuk. Valóban,

$$\mathbf{E}(I_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6},$$

és

$$\mathbf{D}^2(I_1) = \mathbf{E}(I_1^2) - (\mathbf{E}(I_1))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

És persze $\mathbf{E}(I_i) = \mathbf{E}(J_i) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{D}^2(I_i) = \mathbf{D}^2(J_i) = \frac{5}{36}$, $i = 1, \ldots, n$. Az $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{D}^2(X)$ értékek meghatározása számolósabb:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbf{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n}{6}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{n}{6},
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)}{6^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} + \frac{n}{6} \\
&= \frac{n(n-1)}{36} + \frac{n}{6}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = n\frac{5}{36}.$$

Sok számolást megspórolunk, ha felhasználjuk a (3) egyenletet és az 5.3 (iv) és 5.11 Állításokat. Valóban,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(I_i) = \frac{n}{6},$$

és

$$\mathbf{D}^2(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}^2(I_i) = n\frac{5}{36}.$$

Sőt, így az X és Y kovarianciáját is könnyen meghatározhatjuk. Vegyük észre, hogy ha $i \neq j$, akkor I_i és J_j függetlenek, azaz $\mathbf{Cov}(I_i, J_j) = 0$, különben $I_i J_i = 0$, ezért $\mathbf{Cov}(I_i, J_i) = \mathbf{E}(I_i J_i) - \mathbf{E}(I_i)\mathbf{E}(J_i) = -1/36$. Tehát

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Cov}(I_i, J_j) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{36} = -n\frac{1}{36},$$

korrelációjuk pedig

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)} = \frac{-n\frac{1}{36}}{n\frac{5}{36}} = -\frac{1}{5}.$$

Látjuk, hogy a korreláció negatív, azaz ha sok hatost dobunk, akkor kevés egyest, és fordítva, ami teljesen természetes.

Egy egyszerű észrevétellel még kevesebbet kell számolni. Vegyük észre, hogy $X + Y \sim$Binomiális$(n, 1/3)$. Így

$$\mathbf{D}^2(X + Y) = n\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

Másrészt

$$\mathbf{D}^2(X+Y) = \mathbf{D}^2(X) + \mathbf{D}^2(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y) = 2n\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + 2\mathbf{Cov}(X,Y).$$

Átrendezve, adódik a korábbi eredmény.

5.3. Ferdeség és lapultság

5.13. Definíció. Az X véletlen változó ferdesége

$$S(X) = \frac{\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}X)^3\right]}{\mathbf{D}^3(X)},$$

amennyiben $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$, lapultsága (csúcsossága)

$$K(X) = \frac{\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}X)^4\right]}{\mathbf{D}^4(X)} - 3.$$

A ferdeség a véletlen változó várható értékére való szimmetriáját mutatja. Egy X véletlen változó szimmetrikus (a 0-ra), ha X és $-X$ eloszlása megegyezik, és X szimmetrikus c-re, ha $X-c$ és $c-X$ eloszlása megegyezik.

5.14. Állítás. *Ha X szimmetrikus $\mathbf{E}X$-re, és $S(X)$ létezik, akkor $S(X)=0$.*

Bizonyítás. Mivel X szimmetrikus $\mathbf{E}X$-re, ezért $X-\mathbf{E}X$ és $\mathbf{E}X-X$ eloszlása megegyezik. Speciálisan

$$\mathbf{E}[(X-\mathbf{E}X)^3] = \mathbf{E}[(\mathbf{E}X-X)^3],$$

ahonnan kapjuk, hogy $\mathbf{E}[(X-\mathbf{E}X)^3]=0$. □

Ha $S(X)>0$, akkor ez szemléletesen azt jelenti, hogy a változó nagy pozitív értékeket vehet fel, az sűrűségfüggvénye / valószínűségeloszlása jobbra dől; ha $S(X)<0$, akkor pedig balra.

5.15. Állítás. *Ha a lapultság létezik, akkor $K(X)\geq -2$.*

Bizonyítás. Az $Y=(X-\mathbf{E}X)^2$ jelölést bevezetve az állítás azt mondja, hogy

$$(\mathbf{E}(Y))^2 \leq \mathbf{E}(Y^2).$$

Ezt már láttuk. □

A lapultság a sűrűségfüggvény / valószínűségeloszlás alakját mutatja meg a várható érték körül. Ha $K(X)$ kicsi, akkor a sűrűségfüggvény tipikusan sima, lapos, ha pedig $K(X)$ nagy, akkor csúcsos.

5.16. Állítás. *Mind a ferdeség, mind a lapultság eltolás- és skálainvariáns; azaz tetszőles $a>0$ és $b\in\mathbb{R}$ esetén*

$$S(aX+b)=S(X), \quad K(aX+b)=K(X),$$

amennyiben a megfelelő mennyiségek léteznek.

5.4. Feltételes várható érték

Legyen X véletlen változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, és legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor X B-re vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye

$$F_B(x) := \mathbf{P}(X \leq x|B) = \mathbf{P}_B(X \leq x) = \frac{\mathbf{P}(\{X \leq x\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A feltételes valószínűség tulajdonságainál láttuk, hogy $\mathbf{P}_B(\cdot)$ valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{A})$-n, tehát F_B valóban eloszlásfüggvény.

Ha X diszkrét, akkor (persze a B-re vonatkozó feltételes eloszlása is diszkrét) feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(X|B) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_i|B)x_i,$$

feltéve, hogy $\sum_i \mathbf{P}(X = x_i|B)|x_i| < \infty$. Ha pedig van olyan f_B sűrűségfüggvény, melyre $F_B(x) = \int_{-\infty}^{x} f_B(y)\mathrm{d}y$, akkor

$$\mathbf{E}(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_B(x)\mathrm{d}x,$$

feltéve, hogy az integrál jóldefiniált, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_B(x)\mathrm{d}x < \infty$.

5.4.1. Diszkrét feltétel

Legyenek X, Y diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \ldots$, és $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. A korábbiak szerint

$$\mathbf{P}(X = x_k|Y = y_\ell) = \frac{\mathbf{P}(X = x_k, Y = y_\ell)}{\mathbf{P}(Y = y_\ell)},$$

és

$$\mathbf{E}(X|Y = y_\ell) = \sum_k \mathbf{P}(X = x_k|Y = y_\ell)x_k.$$

Jelölje $\mathbf{E}(X|Y)$ azt az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változót, melynek értéke az $\{Y = y_\ell\}$ eseményen $\mathbf{E}(X|Y = y_\ell)$. Formálisan

$$\mathbf{E}(X|Y)(\omega) = \sum_i \mathbf{E}(X|Y = y_i)I(Y = y_i),$$

ahol $I(\cdot)$ az indikátorváltozót jelöli. Vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(X|Y)$ egy olyan véletlen változó, mely függvénye Y-nak.

5.17. Tétel (Teljes valószínűség és várható érték tétele diszkrét esetben). *Legyenek X, Y diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \ldots,$ és $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor*

$$\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_k | Y = y_i)\mathbf{P}(Y = y_i)$$
$$\mathbf{E}(X) = \sum_i \mathbf{E}(X | Y = y_i)\mathbf{P}(Y = y_i).$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség egy teljes valószínűség tétele az $\{Y = y_i\}$ teljes eseményrendszerrel felírva. A második egyenlőség pedig az első és a definíció következménye:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_k \mathbf{P}(X = x_k)x_k \\
&= \sum_k \sum_i \mathbf{P}(X = x_k | Y = y_i)\mathbf{P}(Y = y_i)x_k \\
&= \sum_i \sum_k \mathbf{P}(X = x_k | Y = y_i)\mathbf{P}(Y = y_i)x_k \\
&= \sum_i \mathbf{E}(X | Y = y_i)\mathbf{P}(Y = y_i).
\end{aligned}$$

□

5.4.2. Folytonos feltétel

Legyenek X, Y együttesen folytonos véletlen változók h sűrűségfüggvénnyel. Jelölje

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}x$$

X és Y sűrűségfüggvényét. Ekkor az X véletlen változó Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{h(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ha $f_Y(y) > 0$, akkor $f_{X|Y}(\cdot|y)$ valóban sűrűségfüggvény. Az X véletlen változó Y-ra vonatkozó feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x,$$

amennyiben az integrál értelmes.

5.18. Tétel (Teljes valószínűség és várható érték tétele folytonos esetben). *Legyenek X, Y együttesen folytonos véletlen változók h sűrűségfüggvénnyel. Ekkor*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \mathrm{d}y$$
$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(X|Y = y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

Bizonyítás. Definíció alapján.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \mathrm{d}y &= \int_{y: f_Y(y)>0} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y: f_Y(y)>0} \frac{h(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{y: f_Y(y)>0} h(x,y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \mathrm{d}y = f_X(x).
\end{aligned}$$

A teljes várható érték tétele

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) x \mathrm{d}x \right) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(X|Y = y) f_Y(y) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

A fenti teljes várható érték tétel általánosabban is igaz. Ha (X, Y) tetszőleges véletlen vektorváltozó, Y folytonos, akkor

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[X|Y = y] f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

Ekkor persze a formulában szereplő $\mathbf{E}[X|Y = y]$ mennyiséget nem definiáltuk, de sok esetben látszik, hogy mi az.[2] Speciálisan, ha $X = \mathbf{I}(A)$, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A|Y = y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

[2] Ez persze teljesen precízen lesz később Valószínűségelmélet, vagy Sztochasztikus folyamatok kurzuson MSc-n.

Innen adódik a Bayes-tétel folytonos változata.

5.19. Tétel (Bayes-tétel folytonos változata)**.** *Legyenek x, y olyanok, hogy $f_X(x) > 0$, $f_Y(y) > 0$. Ekkor*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|u) f_X(u) \mathrm{d}u}.$$

Bizonyítás. Hát persze, hiszen az előzőek szerint

$$\frac{h(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|u) f_X(u) \mathrm{d}u} = \frac{\frac{h(x,y)}{f_X(x)} f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

□

6. Nevezetes eloszlások

6.1. Bernoulli-eloszlás

Az X véletlen változó p *paraméterű Bernoulli-eloszlású*, $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0,1]$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és $\mathbf{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$. Várható értéke $\mathbf{E}(X) = p$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

Tipikus példa egy A esemény I_A indikátorváltozója.

6.2. Binomiális eloszlás

Az X véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $X \sim \text{Bin}(n,p)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in [0,1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ez tényleg eloszlás, hiszen a binomiális tétel szerint

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Várható értéke $\mathbf{E}(X) = np$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(X) = np(1-p)$. Ez ugyanúgy igazolható, mint a fönti példában.

Tipikus példa: egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát vizsgáljuk n független kísérlet során. Ekkor, ha

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j\text{-edik kísérletnél } A \text{ bekövetkezett,} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor $I_j \sim \text{Bernoulli}(p)$, és $X = \sum_{i=1}^{n} I_j \sim \text{Bin}(n,p)$. Ebből az előállításból gyorsan adódik a várható értékre és a szórásnégyzetre adott formula.

6.3. Poisson-eloszlás

Az X véletlen változó λ *paraméterű Poisson-eloszlású*, $X \sim \text{Poisson}(p)$, $\lambda \geq 0$, ha X lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ez valóban eloszlás, hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}.$$

Várható értéke

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Második momentuma hasonlóan számolható

$$\mathbf{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda,$$

így szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \lambda.$$

Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeloszlásaként áll elő. Legyen $p = p_n = \lambda/n$, valamely $\lambda > 0$ számra. Ha $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, akkor némi számolás után

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- téves telefonhívások száma;
- autóbalesetek száma;
- nyomdahubák száma egy oldalon;
- földrengések száma;
- csillagok száma egy adott térrészben;
- mazsolák száma a pudingban.
- halálos lórugások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz (1868–1931) orosz közgazdász 20 évig figyelt 14 lovas ezredet. 1898: A kis számok törvénye)

6.4. Geometriai eloszlás

Az X véletlen változó p *paraméterű geometriai eloszlású*, $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \ldots$ és

$$\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ez tényleg eloszlás, hiszen

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)'$$
$$= \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

ezért a várható érték

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

A második momentum hasonlóan számolható

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2},$$

és így

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

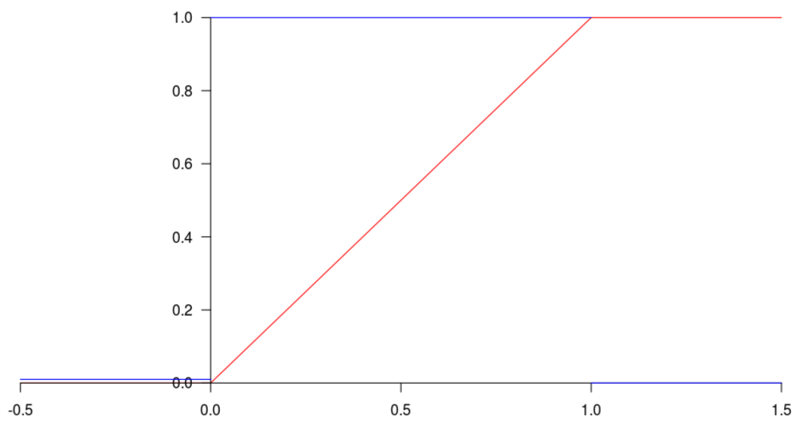
Tipikus példa: addig ismétlünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.

A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\mathbf{P}(X > k + \ell | X > k) = \frac{\mathbf{P}(X > k + \ell)}{\mathbf{P}(X > k)}$$
$$= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(X > \ell).$$

6.1. *Példa.* **Kupongyűjtő probléma.** Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót, $S_0 = 0$. Ekkor X_k geometriai eloszlású, ahol a siker valószínűsége $p_k = (N-k))/N$.



6. ábra. Az $a = 0$, $b = 1$ paraméterű egyenletes eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

6.5. Egyenletes eloszlás

Az X véletlen változó *egyenletes eloszlású az* (a, b) *intervallumon*, $X \sim \mathrm{Egy}(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez tényleg sűrűségfüggvény, hiszen $f \geq 0$, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y = 1$.

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz a definíció, mint korábban, a geometriai valószínűségi mezőnél. Valóban, ha $(c, d) \subset (a, b)$ egy tetszőleges részintervallum, akkor

$$\mathbf{P}(X \in (c, d)) = \int_c^d f(y)\mathrm{d}y = \frac{d-c}{b-a}.$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b], \\ 1, & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Momentumai, $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b y^k \frac{1}{b-a}\mathrm{d}y = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}.\end{aligned}$$

Speciálisan

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbf{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.6. Exponenciális eloszlás

Az X véletlen változó λ*-paraméterű exponenciális eloszlású*, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Ez tényleg sűrűségfüggvény. A megfelelő eloszlásfüggvény

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Momentumai

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} y^k \lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}y \\ &= \lambda^{-k}\int_0^{\infty} z^k e^{-z}\mathrm{d}z = \lambda^{-k}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}.\end{aligned}$$

Itt fölhasználtuk, hogy a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\mathrm{d}y,\ \alpha > 0,$$

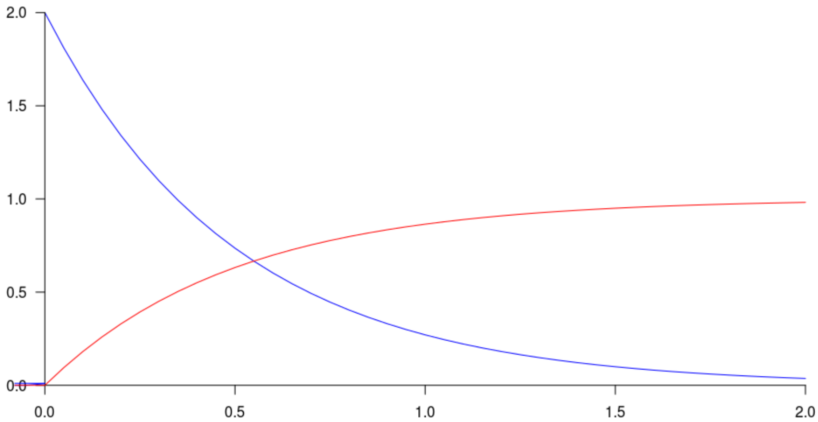
Gamma-függvényre teljesül, hogy $\Gamma(k) = (k-1)!$, azaz a függvény a faktoriális folytonos kiterjesztése. Ez az azonosság következik a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

azonosságból, ami parciális integrálással könnyen adódik.

Ezek szerint

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda},\ \mathbf{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$



7. ábra. A $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

Az exponenciális eloszlás karakterizálja az ún. *örökifjú tulajdonság, vagy emlékezet nélküliség.* Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x, y > 0$ esetén

$$\mathbf{P}(X \geq x + y | X \geq x) = \mathbf{P}(X \geq y). \tag{4}$$

Ez valóban azt jelenti, hogy az eloszlás nem öregszik.

Ha $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, akkor ez teljesül, hiszen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geq x + y | X \geq x) &= \frac{\mathbf{P}(X \geq x + y)}{\mathbf{P}(X \geq x)} \\ &= e^{-\lambda y} = \mathbf{P}(X \geq y),\end{aligned}$$

ami éppen (4). A fordított irány, logaritmust véve, a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásából következik.

Tipikus példák: telefonhívás hossza, várakozási idő, alkatrészek élettartama, üvegpohár élethossza.

6.7. Normális eloszlás

Az X véletlen változó *normális eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel*, jelben $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterekhez tartozó eloszlást *standard normális eloszlásnak* nevezzük. A normális eloszlást nevezik Gauss-eloszlásnak is.

Könnyen látható, hogy $f_{\mu,\sigma}$ függvény μ-re szimmetrikus, azaz $f_{\mu,\sigma}(\mu+y) = f_{\mu,\sigma}(\mu - y)$, $y \in \mathbb{R}$, μ-ben van a maximuma, és $\mu \pm \sigma$ inflexiós pontok.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $f_{\mu,\sigma}$ sűrűségfüggvény, először az alábbi lemmát igazoljuk.

6.1.1. Lemma. *Az* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ *integrál létezik mint improprius Riemann-integrál és értéke* $\sqrt{2\pi}$.

Bizonyítás. Legyen $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ és $I_n = \int_{-n}^{n} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $I_n \to I$, amint $n \to \infty$. Jelölje $R_n = \{(x, y) : |x| \leq n, |y| \leq n\}$ a $2n$ élhosszúságú négyzetet és $B_n = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq n\}$ az n sugarú körlapot. A szukcesszív integrálás szabálya szerint

$$I_n^2 = \iint_{R_n} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Vezessük be a $J_n^2 = \iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jelölést. Ekkor $J_n^2 \leq I_n^2 \leq J_{2n}^2$, hiszen $B_n \subset R_n \subset B_{2n}$, ezért elegendő belátni, hogy $J_n^2 \to 2\pi$, amint $n \to \infty$. Áttérve polárkoordinátákra az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ helyettesítéssel a

$$J_n^2 = \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^n r e^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(1 - e^{-n^2/2}\right)$$

egyenlőséget kapjuk, amiből $\lim_{n\to\infty} J_n^2 = 2\pi$ adódik. □

Az $f_{\mu,\sigma}$ függvény nemnegatív. A $t = (y - \mu)/\sigma$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(y)\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél a 6.1.1 Lemmát használtuk. Azaz $f_{\mu,\sigma}$ valóban sűrűség.

A várható érték

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\mu,\sigma}(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\mu}{\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}y\right) = \mu,
\end{aligned}$$

a szórásnégyzet pedig

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(X) &= \mathbf{E}((X-\mu)^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2 f_{\mu,\sigma}(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)\cdot \frac{y-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(y-\mu)e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Tehát a definícióban szereplő két paraméter az a várható érték és a szórásnégyzet.

Az X eloszlásfüggvénye a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned}
F(x) = \mathbf{P}(X \le x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \Phi((x-\mu)/\sigma),
\end{aligned} \tag{5}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ebből a számolásból világos, hogy elég a Φ függvény értékeit ismerni, és ebből tetszőleges paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvénye számolható.

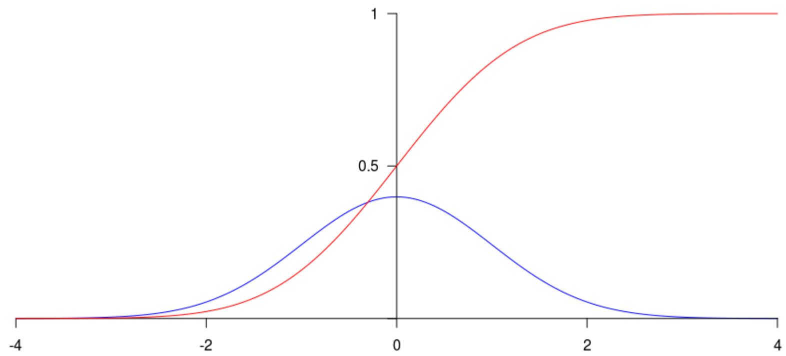
Ugyancsak (5) egyszerű következménye az alábbi állítás.

6.2. Állítás. *Ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.*

Sőt, ez kicsit általánosabban is igaz: ha $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, és a, b valós állandók, $a \neq 0$, akkor $aX + b \sim \mathrm{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

A normális eloszlás nagyon erősen koncentrálódik a várható értéke körül. Valóban, ha $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X-\mu| \le \lambda\sigma) = \mathbf{P}(|Z| \le \lambda) &= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\
&= 2\Phi(\lambda) - 1 = \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$



8. ábra. A standard normális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye

7. Véletlen változók konvergenciája

7.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségei

7.1. Tétel (Markov-egyenlőtlenség)**.** *Legyen X egy véletlen változó* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőn, melynek véges a várható értéke. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}.$$

Bizonyítás. Ha X diszkrét $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathbf{P}(|X| \geq c) = \sum_{i:|x_i| \geq c} \mathbf{P}(X = x_i) \leq \sum_{i:|x_i| \geq c} \frac{|x_i|}{c} \mathbf{P}(X = x_i) \\ \leq \sum_i \frac{|x_i|}{c} \mathbf{P}(X = x_i) = \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}.$$

Ha X folytonos f sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathbf{P}(|X| \geq c) = \int_{|y| \geq c} f(y) \mathrm{d}y \leq \int_{|y| \geq c} \frac{|y|}{c} f(y) \mathrm{d}y \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{c} f(y) \mathrm{d}y = \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}.$$

□

A Markov-egyenlőtlenség egyszerű alkalmazásával adódik a

7.2. Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség)**.** *Legyen X egy véletlen változó $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, melynek véges a szórása. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathbf{D}^2(X)}{c^2}.$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq c) = \mathbf{P}((X - \mathbf{E}(X))^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathbf{D}^2(X)}{c^2}.$$

□

7.2. Nagy számok gyenge törvénye

7.3. Tétel (Csebisev-féle nagy számok gyenge törvénye)**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ páronként független, véges szórású véletlen változók, melyek közös várható értéke μ és szórásnégyzete σ^2. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Bizonyítás. A páronkénti függetlenség miatt

$$\mathbf{D}^2(X_1 + \ldots + X_n) = n\sigma^2.$$

A Csebisev-egyenlőtlenséget az $X = X_1 + \ldots + X_n$ változóra fölírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathbf{D}^2(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},\end{aligned}$$

ami tart 0-hoz. □

A bizonyításból látjuk, hogy a páronkénti függetlenség helyett elég korrelálatlanságot feltenni.

Speciális esetként adódik a

7.4. Tétel (Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye (1713))**.** *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

A tétel szerint a relatív gyakoriságok a fenti értelemben konvergálnak az igazi valószínűséghez. Mivel a valószínűség definícióját a relatív gyakoriságok tulajdonságai motiválták (additivitás), ezért a fenti tétel szerint a valószínűség tényleg az, amit akarunk.

A fenti tételekben szereplő konvergencia a sztochasztikus konvergencia, melynek általános definíciója a következő.

7.5. Definíció. Az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata *sztochasztikusan konvergál X-hez*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

A fenti tételekben szereplő gyenge jelző arra utal, hogy a konvergencia sztochasztikusan teljesül. Erős konvergenciáról akkor beszélünk, ha a véletlen változók majdnem biztosan konvergálnak. Pontosabban, az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata *majdnem biztosan, vagy 1 valószínűséggel konvergál X-hez*, ha

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

Itt persze már az is magyarázatra szorul, hogy az $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ halmaz valóban esemény, azaz eleme a megfelelő σ-algebrának. Ez a σ-algebra tulajdonságaiból következik. Erre részletesebben nem térünk ki.

7.3. Centrális határeloszlás-tétel

A nagy számok törvénye azt állítja, hogy független, azonos eloszlású véletlen változók átlagai közel vannak a várható értékhez. Az alábbiakban ezt a közelséget tesszük precízzé.

7.6. Tétel (Centrális határeloszlás-tétel). *Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók közös $\mathbf{E}(X) = \mu$ várható értékkel, és véges $\mathbf{D}(X) = \sigma$ szórással. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) = \Phi(x),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

A tétel bizonyítása már komolyabb eszközökkel, a karakterisztikus függvények módszerével történik.

A tétel indikátorváltókra vonatkozó speciális esete a

7.7. Tétel (de Moivre–Laplace tétel)**.** *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \Phi(x).$$

Valóban, korábban láttuk, hogy a p-paraméterű Bernoulli-eloszlás várható értéke p és szórása $\sqrt{p(1-p)}$. A speciális eset bizonyítása a binomiális együtthatók pontos aszimptotikájának meghatározásával történhet.

7.8. *Példa.* A kakucsretyegei polgármesterválasztáson két jelölt van: A és B. Kakucsretyege 40000 szavazója egymástól függetlenül, $1/2-1/2$ valószínűséggel szavaz a két jelölt egyikére. A feszült politikai helyzet miatt a szavazatok újraszámlálását rendelik el, ha a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 100 a különbség. Mi a valószínűsége, hogy újraszámlálásra kerül sor?

Ekkor tehát $n = 40000$, $p = \mathbf{P}(\text{A-ra szavaz valaki}) = 1/2$. Legyen S_n az A-ra szavazók száma, ekkor $n - S_n$ a B-re szavazók száma. A kérdés $\mathbf{P}(|S_n - (n - S_n)| \le 100)$. A CHT-ban előforduló mennyiségek $np = 20000$ és $\sqrt{np(1-p)} = 100$. Így a CHT szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|S_n - (n - S_n)| \le 100) &= \mathbf{P}(-100 \le 2S_n - n \le 100) \\
&= \mathbf{P}\left(-0,5 \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le 0,5\right) \\
&\approx \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) \\
&= 2\Phi(0,5) - 1 \approx 0,38.
\end{aligned}$$

Galton deszkája. *Sir Francis Galton (1822–1911): polihisztor, Darwin unokatestvére.* A centrális határeloszlás szemléltetése. Az első sorban 1 ék van, alatta 2, …, az n-edik sorban n. Az n-edik éksor alatt van $n+1$ tartály, 0-tól n-ig sorszámozva. Egy golyót elindítunk az első éknél, és a golyót minden ék $1/2-1/2$ valószínűséggel téríti el jobbra vagy balra. Annak a valószínűsége, hogy a golyó a k-adik tartályban landol $= \frac{1}{2^n}\cdot$ azon útvonalak száma, ahol a golyó k-szor megy jobbra és $(n-k)$-szor balra $= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$. Másként, ha S_n a golyó jobbra eltérítéseinek száma, akkor S_n binomiális eloszlású $(n, 1/2)$ paraméterekkel. Ha sok golyót engedünk le, akkor a haranggörbe rajzolódik ki a tartályokban.

7.4. Borel–Cantelli-lemmák

Legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események. Legyen $\limsup_{n\to\infty} A_n$ az az esemény, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események közül végtelen sok bekövetkezik, az pontosan azon ω kimenetelek halmaza, melyre $\omega \in A_i$ végtelen sok i-re, azaz

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{A_i \text{ végtelen sok } i\text{-re bekövetkezik}\}$$
$$= \{\omega : \ \omega \in A_i \text{ végtelen sok } i\text{-re } \} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Az előállításból világos, hogy $\limsup_{n\to\infty} A_n$ esemény.

Hasonlóan, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ az az esemény, melyre az $A_1, A_2, \dots$ események közül véges sok kivételével mind bekövetkezik, azaz

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

Nyilván $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

7.9. Tétel (I. Borel–Cantelli-lemma)**.** *Legyenek $A_1, A_2, \dots$ olyan események, melyekre*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) < \infty.$$

Ekkor 1 valószínűséggel az $A_1, A_2, \dots$ események közül csak véges sok következik be, azaz

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}(A_i).$$

Ez értelmes (lehet végtelen is!), hiszen minden összeadandó nemnegatív. Nyilván $X(\omega) = \infty$ pontosan akkor teljesül, ha ω végtelen sok A_i eseménynek eleme, vagyis ω kimenetel esetén végtelen sok A_i esemény következik be. A feltétel szerint

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) < \infty,$$

amiből persze következik, hogy $X < \infty$ egy valószínűséggel. □

A lemma megfordításához kell (valamennyi) függetlenség.

7.10. Tétel (II. Borel–Cantelli-lemma)**.** *Legyenek $A_1, A_2, \dots$ független események, melyekre*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty.$$

Ekkor 1 valószínűséggel az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok bekövetkezik, azaz

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Bizonyítás. A valószínűség tulajdonságai szerint

$$\mathbf{P}((\limsup A_n)^c) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{i=n}^{\infty} A_i^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{i=n}^{\infty} A_i^c)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty} [1 - \mathbf{P}(A_i)] \le \lim_{n\to\infty} \exp\left\{-\sum_{i=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)\right\}$$

A feltétel szerint az exponens $-\infty$ minden n-re, így az állítás következik. □

7.5. Nagy számok erős törvénye

Az I. Borel–Cantelli-lemma segítségével erős törvényt is igazolhatunk.

7.11. Tétel (Nagy számok erős törvénye)**.** *Legyenek $X, X_1, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, véges második momentummal. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}(X) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy a változók nemnegatívak, hiszen az $X = X^+ - X^-$ felbontásból következik az állítás általános esetben. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_{k^2} - k^2\mathbf{E}(X)|}{k^2} > \varepsilon\right) \le \frac{k^2\mathbf{D}^2(X)}{k^4\varepsilon^2} = k^{-2}\frac{\mathbf{D}^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Az I. Borel–Cantelli-lemma szerint a $|S_{k^2} - k^2\mathbf{E}(X)| > k^2\varepsilon$ események közül 1 valószínűséggel véges sok következik be. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, kapjuk, hogy

$$\frac{S_{k^2}}{k^2} \to \mathbf{E}(X) \quad \text{majdnem biztosan.}$$

Legyen $k^2 \le n \le (k+1)^2$. A nemnegativitás miatt

$$\frac{S_{k^2}}{(k+1)^2} \le \frac{S_n}{n} \le \frac{S_{(k+1)^2}}{k^2},$$

ahol a bal és jobb oldal is konvergál $\mathbf{E}(X)$-hez, amint $k \to \infty$. □

A várható érték létezése elegendő, nem kell második momentum.

7.12. Tétel (Nagy számok Etemadi-féle erős törvénye (1981))**.** *Legyenek X, $X_1, X_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású véletlen változók, véges $\mathbf{E}(X)$ várható értékkel. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mathbf{E}(X) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

8. A valószínűségi módszer

8.1. Weierstrass approximációtétele

Most a Csebisev-egyenlőtlenség analízisbeli alkalmazására adunk egy szép példát. Weierstrass approximációtétele szerint a polinomok szuprémum normában sűrűn vannak a zárt intervallumon folytonos függvények terében. Az alábbiakban erre adunk egy konstruktív bizonyítást. Legyen f folytonos függvény a $[0,1]$ intervallumon. A hozzátartozó n-edik *Bernstein-polinom* $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Ekkor $B_n(f)$ egyenletesen konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $B_n(f)(x) = \mathbf{E}f(S_n/n)$, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, és $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású Bernoulli(x) véletlen változók (azaz $\mathbf{P}(X_1 = 1) = x = 1 - \mathbf{P}(X_1 = 0)$). A Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\mathbf{P}(|S_n/n - x| > c) \le \mathbf{D}^2(S_n)/(n^2c^2) = x(1-x)/(nc^2)$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel folytonos függvény zárt intervallumon egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|u-v| \le \delta$ esetén $|f(u)-f(v)| \le \varepsilon$. Így

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= |\mathbf{E}\left[f(x) - f(S_n/n)\right]| \le 2M\mathbf{P}(|S_n/n - x| > \delta) + \varepsilon \\ &\le 2M\frac{\mathbf{D}^2(S_n)}{n^2\delta^2} + \varepsilon \le \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} + \varepsilon,\end{aligned}$$

ahol M az $|f|$ maximuma a $[0,1]$ intervallumon. A kapott becslés x-ben egyenletes, ezért az állítást beláttuk.

8.2. Ramsey számok

Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $R(k)$ a legkisebb olyan n számot, melyre igaz, hogy egy n csúcsú teljes gráf (K_n) éleit tetszőleges módon pirossal és kékkel színezve a gráfban találhatunk egyszínű teljes k csúcsú részgráfot.

Megmutatjuk, hogy $R(k) \le 2^{2k}$. Ehhez nem lesz szükség véletlenre. Tekintsük egy $n = 2^{2k}$ csúcsú teljes gráf egy tetszőleges színezését. A következőkben megadunk egy egyszínű K_k-t. Legyen x_1 egy tetszőleges csúcs. Neki $2^{2k} - 1$ szomszédja van, ezért a skatulya elv szerint van legalább 2^{2k-1} olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve. Jelölje A_2 ezen szomszédok halmazát. Most válasszunk egy tetszőleges $x_2 \in A_2$ csúcsot. Az A_2 halmazban neki legalább $2^{2k-1} - 1$ szomszédja van, ezért skatulya elv szerint van legalább 2^{2k-2} olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve (ez a szín persze nem biztos, hogy ugyanolyan, mint ami a x_1x_2 él színe). Ezt folytatva, kapunk egy $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2k}\}$ sorozatot, melyre az teljesül, hogy az x_ix_j, $i < j$, él színe csak i-től függ. Ismét a skatulya elv szerint van k olyan csúcs, melyekre ez a szín azonos. Találtunk egy egyszínű K_k-t.

Most belátjuk, hogy $R(k) \geq 2^{k/2}$. A bizonyítás *Erdős Páltól* származik 1947-ből. Vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot és színezzük ki az éleit egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel pirosra vagy kékre. Azaz minden egyes élre földobunk egy érmét. Annak a valószínűsége, hogy *rögzített* $\{x_1, \ldots, x_k\}$ csúcsok által meghatározott gráf egyszínű K_k az $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$, hiszen vagy minden él piros, vagy minden él kék, és pontosan $\binom{k}{2}$ él van. Tehát annak a valószínűsége, hogy lesz egyszínű K_k legfeljebb $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$. Némi számolással kapjuk, hogy ha $n \leq 2^{k/2}$, akkor ez az érték kisebb, mint 1. Valóban,

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!}2^{1+\frac{k}{2}-\frac{k^2}{2}} \leq \frac{2^{1+k/2}}{k!} \ll 1.$$

Azaz, pozitív valószínűséggel nem lesz egyszínű K_k, ami éppen azt jelenti, hogy van olyan színezés, amiben nincs egyszínű K_k. Így $R(k) \geq 2^{k/2}$.

Ez a bizonyítás nem ad meg egy explicit színezést, amiben nincs monokromatikus K_k. A $k = 20$ esetben $n = 2^{10} = 1024$, és annak a valószínűsége, hogy egy véletlen színezés nem tartalmaz egyszínű K_{20}-at, a fenti becslés szerint kisebb mint

$$\frac{2^{11}}{20!} \approx 8 \cdot 10^{-16}.$$

Ez azt jelenti, hogy a véletlen színezés biztos jó lesz. Összehasonlításképp, annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel játszva két egymás utáni héten telitalálatunk lesz az ötöslottón

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot \frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 5 \cdot 10^{-16}.$$

9. Konvolúció

A konvolúciós formulák független véletlen változók összegének eloszlását adják meg.

9.1. Diszkrét eset

Legyenek X, Y független diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \ldots$, és $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor $Z = X+Y$ véletlen változó is diszkrét, lehetséges értékei $\{z_1, z_2, \ldots\} = \{x_i + y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$. Továbbá, Z eloszlása

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = z) &= \mathbf{P}(X + Y = z) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = z - x_i) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = z - x_i).\end{aligned}$$

Speciálisan, ha X, Y nemnegatív egész értékűek, akkor $X + Y$ is nemnegatív egész értékű, és

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k).$$

Z valószínűségeloszlását X és Y valószínűségeloszlások konvolúciójának nevezzük.

9.1. *Példa.* Legyenek X és Y független Poisson eloszlású véletlen változók λ ill. μ paraméterrel. Ekkor $Z = X + Y \sim$Poisson$(\lambda + \mu)$. Valóban,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}.\end{aligned}$$

9.2. Folytonos eset

9.2. Állítás. *Legyenek X és Y független, folytonos véletlen változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $Z = X + Y$ folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$$

A h függvény az f és g konvolúciója.

Bizonyítás. Mivel X és Y függetlenek, ezért az (X, Y) véletlen vektorváltozó sűrűségfüggvénye $f(x)g(y)$. Legyen $A_z = \{(x, y) : x + y \leq z\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z \leq z) &= \mathbf{P}((X, Y) \in A_z) \\
&= \int\int_{A_z} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x)g(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{z} g(u - x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u - x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

A sűrűségfüggvény definíciójából következik az állítás. □

9.3. *Példa.* Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független exponenciális véletlen változók λ paraméterrel. Ekkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$, sűrűségfüggvénye

$$h_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Ezt az eloszlást (n, λ) paraméterű gamma eloszlásnak nevezik.

Az állítás nyilván igaz $n = 1$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a formula teljesül n-re. Mivel $X_1 + \ldots + X_n$ és X_{n+1} függetlenek, ezért használhatjuk a konvolúciós formulát. Eszerint

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x - y)h_n(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x y^{n-1}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x},
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó formula $n + 1$ esetén.

9.4. *Példa* (Normális eloszlás). Megmutatjuk, hogy független normálisok összege normális. Legyen $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ függetlenek. Könnyű látni, hogy az általános eset erre visszavezethető. Ekkor az összeg $Z = X + Y$

sűrűsége

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) g_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[y^2(1+1/\sigma^2)-2xy+x^2\right]} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(1+1/\sigma^2)\left(y-\frac{x}{1+1/\sigma^2}\right)^2+x^2\left(1-\frac{1}{1+1/\sigma^2}\right)\right]} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma}\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{1+\sigma^2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(1+\sigma^2)}},
\end{aligned}
$$

ami éppen az $N(0, 1+\sigma^2)$ sűrűsége, azaz $Z \sim N(0, 1+\sigma^2)$.

A skálázási tulajdonságból következik, hogy ha $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ és $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ függetlenek, akkor

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

10. Generátorfüggvények

A következőkben kizárólag nemnegatív egész értékű véletlen változókkal foglalkozunk.

10.1. Definíció. Az X nemnegatív egész értékű véletlen változó generátorfüggvénye

$$g(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

A generátorfüggvény egy végtelen hatványsor, melynek a konvergenciasugara legalább 1, hiszen $p_n \leq 1$. Tehát a függvény folytonos $(-1,1)$-en. Megjegyezzük, hogy a konvergenciasugár lehet éppen 1.

10.2. Állítás. *Legyenek X és Y függetlenek g_1, g_2 generátorfüggvénnyel.*

(i) A generátorfüggvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.

(ii) g folytonos $[-1,1]$-en, és $g(1) = 1$.

(iii) $\mathbf{E}(X) = g'(1)$ (pontosabban $\lim_{s\to 1-} g'(s)$).

(iv) $\mathbf{D}^2(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$, feltéve, hogy $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.

(v) Az $X+Y$ generátorfüggvénye $\mathbf{E}(s^{X+Y}) = g_1(s)g_2(s)$.

Bizonyítás. (i) Hát persze, hiszen $p_n = \frac{g^{(n)}}{n!}$.

(ii) Következik abból, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

(iii) Hatványsor a konvergenciaintervallumán belül tagonként deriválható, ezért

$$g'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1} \to \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \mathbf{E}(X)$$

amint $s \to 1-$. Itt lehet $\mathbf{E}(X) = \infty$.

(iv) Az előzőhöz hasonlóan

$$g''(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X).$$

(v) Mivel X és Y függetlenek, ezért

$$\mathbf{E}(s^{X+Y}) = \mathbf{E}(s^X s^Y) = \mathbf{E}(s^X)\mathbf{E}(s^Y).$$

□

10.3. *Példa.*

1. Legyen $I \sim$ Bernoulli(p). Ekkor

$$\mathbf{E}(s^I) = 1 - p + ps, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. Legyenek $I_1, \dots, I_n$ független Bernoulli(p) véletlen változók. Ekkor $S_n = \sum_{k=1}^n I_k \sim$ Binomiális(n, p). Így az előző állítás szerint

$$\mathbf{E}(s^{S_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}(s^{I_k}) = (1 - p + ps)^n.$$

3. Legyen $X \sim$ Poisson(λ). Ekkor

$$\mathbf{E}s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-s)}.$$

4. Legyen $X \sim$ Geometriai(p). Ekkor

$$\mathbf{E}s^X = \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(1-p)^{n-1} = \frac{sp}{1-(1-p)s}.$$

Láttuk, hogy független Poisson-eloszlású véletlen változók összege Poisson. Ezt megkaphatjuk a 10.2 Állítás következményeként. Valóban, ha X és Y független, Poisson-eloszlású véletlen változók λ és μ paraméterekkel, akkor

$$\mathbf{E}s^{X+Y} = \mathbf{E}s^X \mathbf{E}s^Y = e^{-(\lambda+\mu)(1-s)},$$

ami éppen a $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye. Az egyértelműségi tétel szerint $X+Y \sim$ Poisson($\lambda + \mu$).

A következő tétel rávilágít a generátorfüggvények igazi hasznára.

10.4. Tétel (Folytonossági tétel)**.** *Legyen (X_n) nemnegatív egészértékű véletlen változók sorozata, és legyen g_n az X_n generátorfüggvénye. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = p_k$ *létezik minden* $k \geq 0$ *esetén.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} g_n(s) = g(s)$ *létezik minden* $s \in (0, 1)$ *esetén.*

Továbbá, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

Vigyázat, (p_k) nem feltétlenül valószínűségeloszlás. Valóban, legyen például $X_n \equiv n$. Ekkor persze teljesül (i) és (ii) a $p_k \equiv 0$, $g(s) \equiv 0$, $s \in (0, 1)$ határértékekkel. Vagyis a tömeg kiszaladhat a végtelenbe.

10.5. Tétel (Poisson konvergenciatétel)**.** *Legyenek* $(X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn})_n$ *független véletlen változókból álló vektorok, ahol* $X_{in} \sim$ *Bernoulli*(p_{in})*. Tegyük föl, hogy* $\max_{1 \le i \le n} p_{in} \to 0$ *amint* $n \to \infty$*, és* $\sum_{i=1}^{n} p_{in} = \lambda$*. Ekkor* S_n *határeloszlása* λ *paraméterű Poisson-eloszlás, azaz tetszőleges* $k = 0, 1, \ldots$ *esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bizonyítás. A függetlenség miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}s^{S_n} &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}s^{X_{in}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 - p_{in}(1-s)) \\
&= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \log(1 - p_{in}(1-s)) \right\} \\
&= \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} (p_{in}(1-s)) + o(p_{in})) \right\} \\
&= \exp\left\{ -\lambda(1-s) + o(\lambda) \right\}.
\end{aligned}$$

A folytonossági tételből következik az állítás. □