Valószínűségelmélet feladatgyűjtemény

Kevei Péter

2019. március 13.

Tartalomjegyzék

Előszó

A feladatgyűjtemény a Szegedi Tudományegyetem Matematika BSc szakos hallgatói számára tartott Valószínűségelmélet c. tárgyhoz készült. A heti négy óra előadáshoz csupán egy óra gyakorlat van, ezért különösen fontos az otthoni feladatmegoldás. Ennek megkönnyítését célozza meg a jegyzet.

Magyar nyelven kevés olyan valószínűségszámítás feladatgyűjtemény van, ami használható a Valószínűségelmélet tárgyhoz. Ilyen a klasszikus „Ötszerzős" példatár, Bognár, Mogyoródi, Prékopa, Rényi, Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény [3]. Ugyanakkor e feladatgyűjtemény sem fedi le teljesen a jelen példatár anyagát, hiszen nem mértékelméleti megközelítést használ, így események mérhetősége, farokesemények kimaradnak. Másrészt [3] sok olyan témakört is tartalmaz, amivel itt nem foglalkozunk; pl. elemi valószínűségszámítási példák, sztochasztikus folyamatok. A másik magyar nyelvű feladatgyűjtemény az interneten elérhető Barczy, Pap: Valószínűségszámítás II. példatár [1], ami már felöleli a Valószínűségelmélet tárgy anyagát. A jelen példatár és [1] anyaga nagyjából megegyezik, az egyes témákból az egyik illetve másik tartalmaz több feladatot.

A tárgyalt feladatok közül sok része a matematikai folklórnak, de ahol tudtam feltüntettem a forrást. Az említett két példatár mellett sok feladatot vettem át Billingsley [2] és Breiman [4] könyvéből, néhány a Kolmogorov verseny feladatai [5] közül való. Sok példa kutatásaim során merült fel, ezeknél megadtam a hivatkozást (cikket vagy könyvet), illetve sok saját agyszüleményem.

A feladatok témák szerint vannak csoportosítva, minden téma elején egy rövid elméleti összefoglaló található, melyben a szükséges definíciók és főbb tételek, tulajdonságok szerepelnek. Minden témában jó néhány feladat megoldása nagyon részletesen ki van dolgozva, egyes példáknál pedig rövid útmutatás található.

A feladatgyűjtemény írása a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

1. Mérhetőség

Mérhetőség, σ-algebrák, Lebesgue–Stieltjes-integrál, véletlen változók és eloszlásfüggvényeik

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *σ-algebra* az Ω alaphalmazon, ha $\Omega \in \mathcal{A}$; $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$; $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer *algebra*, ha csak a véges unióra zárt. A μ halmazfüggvény *mérték*, ha nemnegatív, nem azonosan végtelen és σ-additív $\mathcal{A}$-n. *Valószínűségi mérték* esetén $\mu(\Omega) = 1$. A $\mathcal{C}$ halmazrendszer *félalgebra*, ha zárt a metszetre és minden elemének komplementere előáll $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniójaként.

Tetszőleges sok σ-algebra metszete σ-algebra. Ebből következik, hogy minden $\mathcal{C}$ halmazrendszerhez van őt tartalmazó legszűkebb σ-algebra; ezt nevezzük a $\mathcal{C}$ által generált σ-algebrának. Jele: $\sigma(\mathcal{C})$.

Ha adott egy topológia, akkor a nyitott halmazok által generált σ-algebra a *Borel-halmazok* σ-algebrája.

Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ valós függvény *$\mathcal{A}$-mérhető*, ha minden $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmazra $f^{-1}(B) = \{\omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$. Az X valós függvény akkor *véletlen változó*, ha mérhető. *Eloszlásfüggvénye* $F(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}$. Egy függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha monoton növő, jobbról folytonos és $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

A mérhetőséget elég generátorrendszeren ellenőrizni. A leggyakrabban használt speciális esetek: f mérhető, ha minden x-re: $f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$; $f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$; $f^{-1}((x, \infty)) \in \mathcal{A}$; .... Sőt elegendő csak racionális x-ekre megkövetelni a feltételeket.

Legyen F monoton növő jobbról folytonos függvény az egyenesen és legyen $a < b$ esetén $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. Ezzel definiáltuk μ_F-et a $\mathcal{C} = \{(a, b] : -\infty \le a < b \le \infty\}$ félalgebrán. Megmutatható, hogy μ_F mérték $\mathcal{C}$-n. A kiterjesztési eljárás szerint μ_F kiterjeszthető a $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ Borel-halmazokon definiált mértékké. Ezt nevezzük az F által indukált *Lebesgue–Stieltjes-mértéknek*, melyet μ_F-el jelölünk. Sőt, általában a $\mathrm{d}\mu_F = \mathrm{d}F$ jelölést használjuk.

1.1. Legyen $\mathcal{A}$ a véges vagy ko-véges (A ko-véges, ha komplementere véges) halmazok osztálya. Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ algebra, de csak akkor σ-algebra, ha Ω véges!

Megoldás. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer definíciójában A és A^c szerepe szimmetrikus, ezért ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $A^c \in \mathcal{A}$ is teljesül. Nézzük most az unióra való zártságot. Elég 2-re igazolni, azaz ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$. Ha A^c vagy B^c véges, akkor $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ miatt $(A \cap B)^c$ is véges, így

$(A \cup B) \in \mathcal{A}$. Ha pedig A és B is véges, akkor $A \cup B$ is véges, így $\in \mathcal{A}$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{A}$ algebra.

Ha $|\Omega| = \infty$, akkor van $\omega_1, \omega_2, \ldots$ végtelen sok különböző eleme. Nyilván $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Viszont az $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots\}$ halmaz végtelen, és a komplementere tartalmazza az $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}$ végtelen halmazt, így $A \notin \mathcal{A}$. Tehát ekkor $\mathcal{A}$ nem σ-algebra. Véges alaphalmazon persze az algebra és a σ-algebra tulajdonság ugyanaz.

1.2. Legyen $\mathcal{A}$ a megszámlálható vagy ko-megszámlálható halmazok osztálya. Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ σ-algebra! Legyen $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \Omega\}$. Mutassuk meg, hogy $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$!

1.3. Legyen $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ és

$$\mathcal{C} = \left\{ A \subset \mathbb{N} : D(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#(A \cap \{1, \ldots, n\})}{n} \text{ létezik} \right\}.$$

A $D(A)$ értéket az A halmaz számelméleti sűrűségének nevezik (persze csak ha létezik). Igazoljuk, hogy

(a) $D(\cdot)$ végesen additív $\mathcal{C}$-n;

(b) $D(\cdot)$ nem mérték $\mathcal{C}$-n;

(c) $\mathcal{C}$ kontinuum számosságú;

(d) $\mathcal{C}$ zárt a véges diszjunkt unióra!

Mi lesz a D által indukált külső mérték? ([2] Problem 2.18 p.35)

1.4. Adjuk meg a lottóhúzást leíró valószínűségi mezőt!

1.5. Igazoljuk, hogy σ-algebra számossága nem lehet megszámlálhatóan végtelen, tehát vagy véges vagy legalább kontinuum sok eleme van.

1.6. Határozzuk meg az alábbi halmazrendszerek által generált $\tau(\mathcal{H})$ topológiát és $\sigma(\mathcal{H})$ σ-algebrát! Milyen kapcsolat áll $\tau(\mathcal{H})$ és $\sigma(\mathcal{H})$ között?

(a) $\mathcal{H}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

(b) $\mathcal{H}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

(c) $\mathcal{H}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;

(d) $\mathcal{H}_4 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$;

(e) $\mathcal{H}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

1.7. Legyenek X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Igazoljuk, hogy a következő halmazok mérhetők: (i) $\{\sup_n X_n > 0\}$; (ii) $\{\sup_n X_n = 0\}$; (iii) $\limsup_n X_n \geq 0\}$.

Tetszőleges $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, és $B \subset \mathbb{R}$ esetén $Y^{-1}(B) = \{Y \in B\} = \{\omega : Y(\omega) \in B\}$.

Megoldás. Az ilyen feladatoknál a kérdéses halmazt elő kell állítani nívóhalmazokból ($\{X_n \leq x\}$, vagy $\{X_n < x\}$, vagy ezek komplementere) megszámlálható sok halmazelméleti művelet (metszet, unió, különbség) segítségével.

(i) Az első példában azt kell észrevenni, hogy egy x_n valós számsorozat szuprémuma pontosan akkor szigorúan pozitív, ha van pozitív eleme. Azaz $\sup_n x_n > 0$ pontosan akkor, ha létezik olyan n, melyre $x_n > 0$. A példában azokat az ω kimeneteleket kell összegyűjteni, melyre $\sup_n X_n(\omega) > 0$. Ezek szerint

$$\begin{aligned}\{\sup_n X_n > 0\} &= \{\omega : \sup_n X_n(\omega) > 0\} \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\{\omega : X_n(\omega) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{X_n > 0\}.\end{aligned}$$

Mivel minden n esetén $\{X_n > 0\}$ mérhető halmaz, és mérhető halmazok megszámlálható uniója is mérhető, ezért az állítást beláttuk. A többi rész bizonyítását nem írjuk ki ilyen részletesen.

(ii) Világos, hogy a fenti gondolatmenetben 0 helyett tetszőleges valós számot írva is minden igaz marad, így $\{\sup_n X_n > \alpha\} \in \mathcal{A}$ (a mérhetőség szinonimája a $\in \mathcal{A}$), tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel

$$\{\sup_n X_n = 0\} = \{\sup_n X_n \geq 0\} \setminus \{\sup_n X_n > 0\},$$

ezért ha belátjuk, hogy $\{\sup_n X_n \geq 0\} \in \mathcal{A}$, akkor készen vagyunk. Na de

$$\{\sup_n X_n \geq 0\} = \cap_{k=1}^{\infty}\{\sup_n X_n > -k^{-1}\},$$

és a megszámlálható metszet minden eleme mérhető, így a σ-algebra tulajdonság miatt a metszet is mérhető. (Vegyük észre, hogy $\{\sup_n X_n \geq 0\} \neq \cup_{n=1}^{\infty}\{X_n \geq 0\}$. A $-1/n$ sorozat egy ellenpélda.)

(iii) A $\limsup$ definícióját kell használni, amit valós számsorozatokra tanultunk. Eszerint $\limsup_n x_n \geq 0$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak végtelen sok $-\varepsilon$-nál nagyobb eleme van, vagy másképp, minden $\varepsilon > 0$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $k \geq n$, hogy $x_k > -\varepsilon$. Könnyű meggondolni, hogy a halmazos átírásban a *minden* kvantornak az *metszet*, a *létezik* kvantornak pedig az *unió* felel meg (ezt már (i)-nél is használtuk). Arra kell még figyelni, hogy ε helyett egy diszkrét 0-hoz tartó sorozatot kell írni, hogy megszámlálható metszetet kapjunk. Tehát

$$\{\limsup_n X_n \geq 0\} = \cap_{m=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} \{X_k > -m^{-1}\}.$$

Mivel X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók, ezért mérhetőek, $\{X_k > -m^{-1}\} \in \mathcal{A}$, minden k és m esetén. Ilyenek megszámlálható uniója mérhető, mérhető halmazok megszámlálható metszete mérhető, végül mérhető halmazok megszámlálható metszete megint mérhető, és kész.

1.8. Legyenek X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn és c tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok mérhetők: $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c\} = \{\lim_{n\to\infty} X_n = c\}$; $\{\lim_{n\to\infty} X_n$ létezik$\}$; $\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\}$; $\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq c\}$.

1.9. Legyenek f, g, f_n mérhetőek. Mutassuk meg, hogy $f+g$, cf, $\min(f, g)$, $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$ mérhetőek!

1.10. Egy halmaz G_δ, ha megszámlálható sok nyitott halmaz metszete. Mutassuk meg, hogy az irracionális számok halmaza G_δ. Adjunk példát olyan függvényre, melynek folytonossági pontjai az irracionális számok. [Azaz a függvény minden racionális pontban szakad, de minden irracionálisban folytonos.] Mutassuk meg, hogy a racionális számok halmaza nem G_δ. [Használjuk a Baire-kategóriatételt!] ([10])

1.11. Igazoljuk, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény folytonossági pontjainak halmaza G_δ! Az előző feladat alapján ez azt jelenti, hogy nincs olyan függvény, ami a racionális pontokban folytonos, az irracionálisokban meg szakad. ([10])

Segítség. Definiáljuk a $\phi(x, \delta) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in (x - \delta, x + \delta)\}$, $\phi(x) = \inf_{\delta>0} \phi(x, \delta)$ függvényeket. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos x-ben, ha $\phi(x) = 0$. A ϕ nullhelyeit meg elő lehet állítani megszámlálható sok nyitott halmaz metszeteként.

1.12. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy az a halmaz, ahol a deriváltja létezik, mérhető!

1.13. Legyen $F(x)$ tetszőleges eloszlásfüggvény. Írjuk fel $F(x)$ segítségével a következő halmazok μ_F (F által generált) Lebesgue–Stieltjes-mértékét: $(0, 1], \{0\}, [0, 1), [0, \infty), \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*$.

Megoldás. A definíció szerint $\mu_F((0, 1]) = F(1) - F(0)$.

Az egyelemű halmazok viszont már nem $(a, b]$ alakúak, ezért ilyenkor a definíció nem elég. Használjuk a mértékek folytonossági tételét! Világos, hogy $\{0\} = \cap_{n=1}^{\infty}(-n^{-1}, 0]$, és a $(-1/n, 0]$ halmazsorozat monoton csökkenő, így, mivel $\mu_F((-1,0]) < \infty$ (valószínűségi mérték esetén ez a feltétel mindig teljesül) így a folytonossági tétel szerint

$$\begin{aligned}\mu_F(\{0\}) = \mu_F(\cap_{n=1}^{\infty}(-n^{-1},0]) &= \lim_{n\to\infty}\mu_F((-n^{-1},0]) \\ &= \lim_{n\to\infty}(F(0) - F(-n^{-1})) = F(0) - F(0-),\end{aligned}$$

ahol $F(x-) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$ az x-beli baloldali határérték. Fontos látni, hogy ez éppen az F eloszlásfüggvény ugrása a 0 pontban. Általánosan, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mu_F(\{x\}) = F(x) - F(x-)$. Ebből azonnal következik, hogy ha F folytonos akkor minden egyelemű, és így minden megszámlálható sok elemű halmaz mértéke 0.

Mivel $[0,1) = (\{0\} \cup (0,1])\setminus\{1\}$, így az előzőek és a mérték tulajdonságai alapján

$$\mu_F([0,1)) = (F(0) - F(0-) + F(1) - F(0)) - (F(1) - F(1-)) = F(1-) - F(0-).$$

Megint a folytonossági tételt használjuk: $(0,\infty) = \cup_{n=1}^{\infty}(0,n]$, és az unió monoton, ezért

$$\begin{aligned}\mu_F((0,\infty)) &= \mu_F\left(\cup_{n=1}^{\infty}(0,n]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}(F(n) - F(0)) = 1 - F(0).\end{aligned}$$

Így $\mu_F([0,\infty)) = 1 - F(0-)$.

A számegyenes mértékét hasonlóan számolhatjuk: $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty}(-n,n]$, és az unió monoton, így

$$\begin{aligned}\mu_F(\mathbb{R}) = \mu_F(\cup_{n=1}^{\infty}(-n,n]) &= \lim_{n\to\infty}\mu_F((-n,n]) \\ &= \lim_{n\to\infty}(F(n) - F(-n)) = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

A racionális számok megszámlálható sokan vannak, ezért

$$\mu_F(\mathbb{Q}) = \mu_F(\cup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}}\mu_F(\{r\}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}}(F(r) - F(r-)).$$

Végül $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, és az unió diszjunkt, így

$$\mu_F(\mathbb{Q}^*) = 1 - \mu_F(\mathbb{Q}) = 1 - \sum_{r\in\mathbb{Q}}(F(r) - F(r-)).$$

1.14. Legyen

(a) $F(x) = 1$ ha $x \geq 0$, 0 különben;

(b) $F(x) = k/n$, ha $x \in [k, k+1)$, $1 \leq k \leq n$, 0, ha $x < 1$ és 1, ha $x \leq n$.

(c) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, ha $x > 0$, 0 különben.

Határozzuk meg az $\int g \mathrm{d}\mu_F$ integrál értékét, ahol g tetszőleges mérhető függvény!

Megoldás. (a) Az előzőek szerint $\mu_F(\{0\}) = F(0) - F(0-) = 1$, azaz a mérték egységnyi tömeget tesz a 0 pontba, és máshova nem is tesz tömeget. Ezért tetszőleges A Borel-halmazra $\mu_F(A) = I_A(0) = 1$ ha $0 \in A$ és 0 különben. Ebből világos, hogy a g függvénynek csak a 0-ban felvett értéke az érdekes, és az integrál definíciója alapján

$$\int g \mathrm{d}F = \int g \mathrm{d}\mu_F = g(0) \cdot 1.$$

Fontos látni, hogy ez a függvény egy olyan véletlen változó eloszlásfüggvénye, mely egy valószínűséggel 0 értéket vesz fel. Az ilyen változókat *degenerált* véletlen változónak nevezzük, hiszen valójában nem is véletlen.

(b) Ez a függvény is egy tiszta ugrófüggvény, ami egy olyan változó eloszlásfüggvénye, mely az $\{1, 2, \ldots, n\}$ értékeket veheti fel, mindegyiket $1/n$ valószínűséggel. Tehát a μ_F mérték az $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontokra koncentrálódik, és $\mu_F(A) = n^{-1}|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$, $A \in \mathcal{B}^1$, azaz csak az számít, hogy az A halmazba hány pont esik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemek közül. Innen világos, hogy a g függvény $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontokban felvett értéke az érdekes, és

$$\int g \mathrm{d}F = \int g \mathrm{d}\mu_F = \sum_{k=1}^{n} g(k) \cdot \frac{1}{n}.$$

(c) Ez a függvény folytonos (hát persze, ő az egy paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye), ezért minden megszámlálható halmaz μ_F szerinti mértéke 0. Azt is látjuk, hogy a $(-\infty, 0]$ félegyenes mértéke 0, és így ennek bármely részhalmazának is 0 a mértéke. Legyen most $0 < a < b < \infty$. A Newton–Leibniz-formulát, és az indukált mérték definícióját alkalmazva

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b} = \int_a^b \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y.$$

Ezt éppen úgy is írhatjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(y) \mathrm{d}F(y) = \int_{\mathbb{R}} I_{(a,b]}(y) \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y.$$

Az integrál linearitását és a Lebesgue Monoton Konvergenciatételt használva (éppen úgy, ahogy ezt mértékelméletből megtanultuk) kapjuk, hogy tetszőleges g mérhető függvényre

$$\int g \mathrm{d}F = \int_0^\infty g(y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(y)\mathrm{d}y,$$

ahol $f(y) = \mathrm{e}^{-y}$, ha $y \geq 0$, és 0 különben, azaz $f(y) = F'(y)$. *Itt azt kell megjegyezni, hogy abszolút folytonos esetben* $\mathrm{d}F(y) = f(y)\mathrm{d}y$.

1.15. Adjuk meg a $G(x)$ függvény által indukált μ_G Lebesgue–Stieltjes-mértéknek a λ Lebesgue-mértékre vonatkozó Lebesgue-felbontását, és határozzuk meg az abszolút folytonos tag Radon–Nikodym-deriváltját. Számoljuk ki az $\int_A g(x)\mathrm{d}G(x)$ Lebesgue–Stieltjes-integrálok értékét!

(a) $A = \mathbb{R},\ g(x) = x,\ G(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\kappa x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$, $\kappa > 0$.

(b) $A = \mathbb{R},\ g(x) = x^2,\ G(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\kappa} \sum_{m=0}^{n} \frac{\kappa^m}{m!}, & \text{ha } x \in [n, n+1), \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

(c) $A = (-2, 2)$,

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1, \\ x+3, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ \cos x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi/2, \\ x^2, & \text{ha } \pi/2 \leq x, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } -1 \leq x < 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \mathrm{e}^x, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

1.16. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező, és $A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0\}$. Mutassuk meg, hogy A megszámlálható!

1.17. Igazak-e a következő állítások?

(a) Ha X véletlen változó, akkor X^2 is.

(b) Ha X^2 véletlen változó, akkor X is.

(c) Ha X^2 véletlen változó, akkor $|X|$ is.

1.18. Az X véletlen változóról akkor mondjuk, hogy eloszlása szimmetrikus 0-ra, ha X és $-X$ eloszlása megegyezik. Mutassuk meg, hogy X eloszlása pontosan akkor szimmetrikus 0-ra, ha eloszlásfüggvényére $F(x) + F(-x-) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ fennáll!

1.19. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvény esetén fennáll:

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{1}{z}\mathrm{d}F(z) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x\int_{-\infty}^x \frac{1}{z}\mathrm{d}F(z) = 0;$$
$$\lim_{x\to 0+} x\int_x^\infty \frac{1}{z}\mathrm{d}F(z) = 0, \quad \lim_{x\to 0-} \int_{-\infty}^x \frac{1}{z}\mathrm{d}F(z) = 0.$$

Megoldás. Belátjuk az első állítást, a többi ugyanúgy megy. Nyilván

$$x\int_x^\infty \frac{1}{z}\mathrm{d}F(z) = \int_0^\infty \frac{x}{z} I_{z>x}(z)\mathrm{d}F(z).$$

Az integrandus (mint z függvénye) minden rögzített $z > 0$ esetén konvergál 0-hoz, amint $x \to \infty$, hiszen ha $x > z$, akkor az integrandus 0. Azt kell tehát megmutatni, hogy az integrál és a határátmenet felcserélhető. Ezt Lebesgue Majoráns Konvergenciatételével igazoljuk. Ehhez kell egy integrálható majoráns. Vegyük észre, hogy minden x-re és minden z-re,

$$\frac{x}{z} I_{z>x}(z) \leq 1,$$

ami persze integrálható μ_F szerint, és ezzel az állítást igazoltuk.

1.20. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges F eloszlásfüggvényre, melyre $F(0) = 0$,

$$\int_0^\infty F^{n-1}(x)\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{n}.$$

1.21. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események esetén

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.22. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre

(a) $\mathbf{P}\{A \circ C\} \leq \mathbf{P}\{A \circ B\} + \mathbf{P}\{B \circ C\}$;

(b) ha $\mathbf{P}\{A \circ B\} = 0$ akkor $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\}$;

(c) $|\mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{A \cap C\}| \leq \mathbf{P}\{B \circ C\}$.

Megjegyzés. A $\circ$ a szimmetrikus differenciát jelöli, azaz $A \circ B = A \backslash B \cup B \backslash A$.

1.23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$|\mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}| \leq \frac{1}{4}.$$

1.24. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra és $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre minden $\epsilon > 0$ szám esetén létezik $A_\epsilon \in \mathcal{A}_0$, hogy $\mathbf{P}(A \circ A_\epsilon) \leq \epsilon$. Mutassuk meg, hogy van $A_0 \in \mathcal{A}_0$, melyre $\mathbf{P}(A \circ A_0) = 0$.

1.25. Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ megszámlálható halmaz, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ és $\mathbf{P}(\omega_n) = p_n > 0$, ahol $p_n \geq p_{n+1}$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $R(\mathbf{P}) = \{x : \exists\, A \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(A) = x\}$ perfekt halmaz.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $R(\mathbf{P}) = [0, 1]$ pontosan akkor, ha minden n-re teljesül a $p_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$ feltétel.

([9])

1.26. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt *atommentes*nek nevezzük, ha minden pozitív valószínűségű A eseményhez van olyan $B \subset A$ esemény, hogy $0 < \mathbf{P}\{B\} < \mathbf{P}\{A\}$. Bizonyítsuk be, hogy atommentes valószínűségi mező esetén $R(\mathbf{P}) = [0, 1]$. ([9])

1.27. Bizonyítsuk be, hogy $R(\mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező esetén zárt halmaz. ([9])

2. 0–1 törvények

Farok-σ-algebrák, Borel–Cantelli lemmák és Kolmogorov 0–1 törvénye

Borel–Cantelli-lemmák. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ események.

(I.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} < \infty$, akkor az események közül egy valószínűséggel, csak véges sok következik be, azaz a

$$\{\omega \in \Omega \,:\, \omega \in A_n \text{végtelen sok } n\text{-re}\} = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

halmaz mértéke 0, azaz $\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} = 0$.

(II.) Ha az események *függetlenek* és $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} = \infty$, akkor az $A_1, A_2, \ldots$ események közül egy valószínűséggel (majdnem biztosan) végtelen sok következik be, azaz $\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} A_n\} = 1$.

Farok-σ-algebra. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Az $X_1, X_2, \ldots$ változók által generált *farok-σ-algebra* a

$$\mathcal{T} = \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$$

σ-algebra. Az $A \in \mathcal{T}$ eseményeket farokeseményeknek nevezzük.

A definícióban σ-algebrák monoton csökkenő sorozatának metszete szerepel. Az intuitív jelentés: a $\mathcal{T}$-beli események bekövetkezését nem befolyásolja ha a változók közül véges sok megváltozik. Valóban, hiszen ha $A \in \mathcal{T}$ akkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $A \in \sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$, azaz A nem függ az $X_1, X_2, \ldots, X_m$ változóktól. Ez alapján világos, hogy a $\{\lim_n X_n \text{létezik}\}$, $\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\}$ alakú események farokesemények, viszont az $\{\inf_n X_n < 0\}$, $\{X_{10} > 2\}$ események nem azok. A precíz bizonyítást lásd a feladatok között.

Kolmogorov 0–1 törvénye. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, és legyen $\mathcal{T}$ az általuk meghatározott farok-σ-algebra. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}$ farokesemény valószínűsége 0 vagy 1.

2.1. Az alábbi események közül melyek elemei az $X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók által generált farok-σ-algebrának?

$$\{\inf_{n \in \mathbb{N}} X_n < c\}; \ \{\lim_{n \to \infty} X_n \text{ létezik}\}; \ \{\limsup_{n \to \infty} X_n \geq 0\};$$
$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\right\}; \ \left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 0\right\}.$$

(Tehát ami eleme, arról mutassuk meg hogy eleme, ami nem eleme, arról mutassuk meg hogy nem.)

Megoldás. Feltehetjük, hogy $c = 0$. Az intuíció alapján világos, hogy $\{\inf_n X_n < 0\}$ nem farokesemény, hiszen egyetlen változó megváltoztatása is befolyásolja az infimum értéket, ezáltal az esemény bekövetkezését. A precíz bizonyítás ezért itt ellenpélda konstruálását jelenti. Legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$. Legyen $X_1(\omega_1) = -1$, $X_1(\omega_2) = 0$, és $X_n \equiv 2$, $n \geq 2$. Mivel $n \geq 2$ esetén X_n degenerált, így $\sigma(X_n) = \{\emptyset, \Omega\}$ a triviális σ-algebra, és ezért ugyancsak $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \{\emptyset, \Omega\}$. Innen azonnal látjuk, hogy

$$\mathcal{T} = \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \{\emptyset, \Omega\},$$

azaz a farok-σ-algebra is a triviális. Ugyanakkor

$$\{\inf_n X_n < 0\} = \{X_1 < 0\} = \{X_1 = -1\} = \{\omega_1\},$$

ami nem farokesemény.

Hasonlóan egyszerű konstrukcióval igazolható, hogy $\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 0\} \notin \mathcal{T}$.

A másik három esemény farokesemény, csak az egyik bizonyítását írjuk ki részletesen. Mivel az $\{\lim_{n\to\infty} X_n$ létezik$\}$ eseménynél a határérték nincs megadva, ezért létezését a Cauchy-féle belső konvergenciakritérium segítségével tudjuk leírni. Eszerint az $x_1, x_2, \ldots,$ (*determinisztikus!*) valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall m, n \geq N): \ |x_m - x_n| \leq \varepsilon.$$

A folytonos ε-t kicseréljük egy megszámlálható sorozatra (k^{-1}) és a korábban látott módon lefordítjuk halmazok nyelvére a fenti tulajdonságot. Eszerint

$$\{\lim_n X_n \text{ létezik}\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{N=1}^{\infty} \cap_{m=N}^{\infty} \cap_{n=N}^{\infty} \{|X_m - X_n| \leq k^{-1}\}.$$

Mivel $\{|X_m - X_n| \leq k^{-1}\}$ mérhető, és mérhető halmazokon megszámlálható halmazelméleti műveletet elvégezve mérhetőt kapunk, azt láttuk be, hogy $\{\lim_n X_n$ létezik$\} \in \mathcal{A}$. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\{\lim_n X_n$ létezik$\}$ esemény farokesemény, azt kell megmutatni, hogy minden K esetén

$$\{\lim_n X_n \text{ létezik}\} \in \sigma(X_K, X_{K+1}, \ldots).$$

Ehhez vegyük észre, hogy a $\cap_{m=N}^{\infty} \cap_{n=N}^{\infty} \{|X_m - X_n| \leq k^{-1}\}$ halmazsorozat rögzített k esetén N-ben monoton növő. Hát persze, hisz egyre kevesebb halmazt metszünk össze. Emiatt

$$\cup_{N=1}^{\infty} \cap_{m=N}^{\infty} \cap_{n=N}^{\infty} \{|X_m - X_n| \leq k^{-1}\} = \cup_{N=K}^{\infty} \cap_{m=N}^{\infty} \cap_{n=N}^{\infty} \{|X_m - X_n| \leq k^{-1}\},$$

és a jobb oldalon álló minden halmaz már $\in \sigma(X_K, X_{K+1}, \ldots)$. Ezzel az állítás beláttuk.

2.2. Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ események. Mi a

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_n$$

események jelentése? Milyen tartalmazás áll fönn a két halmaz között?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy

$$\limsup_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{végtelen sok } n \text{ esetén}\}.$$

Valóban, ha $\omega \in A_n$ végtelen sok n esetén, akkor minden n_0 természetes számhoz van olyan $m > n_0$, hogy $\omega \in A_m$. Ezért $\omega \in \cup_{m=n_0}^{\infty}$ minden n_0

esetén, ami éppen azt jelenti, hogy $\omega \in \limsup_n A_n$. A fordított irányú tartalmazás ugyanígy igazolható.

Megmutatjuk, hogy

$$\liminf_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{véges sok kivételével minden } n \text{ esetén}\}.$$

Valóban, ha van olyan n, hogy $\omega \in A_m$ minden $m \geq n$ esetén, akkor $\omega \in \cap_{m=n}\infty A_m$, és így $\omega \in \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n} A_m$. A fordított irány ugyanígy megy.

A fenti átfogalmazásból világos, hogy $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Mindig erre a szemléletes jelentésre gondoljunk, és ne a definícióra!

2.3. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{\liminf_n A_n\} \leq \liminf_n \mathbf{P}\{A_n\} \leq \limsup_n \mathbf{P}\{A_n\} \leq \mathbf{P}\{\limsup_n A_n\}.$$

2.4. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned}
\left(\limsup_n A_n\right) \cap \left(\limsup_n B_n\right) &\supset \limsup_n (A_n \cap B_n);\\
\left(\limsup_n A_n\right) \cup \left(\limsup_n B_n\right) &= \limsup_n (A_n \cup B_n);\\
\left(\liminf_n A_n\right) \cap \left(\liminf_n B_n\right) &= \liminf_n (A_n \cap B_n);\\
\left(\liminf_n A_n\right) \cap \left(\liminf_n B_n\right) &\subset \liminf_n (A_n \cap B_n),
\end{aligned}$$

továbbá, hogy a két tartalmazás lehet szigorú. ([2] Problem 4.2. p.64)

2.5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók. Igazoljuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1 \quad \text{m.b.}$$

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n \geq 1$ m.b. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített, és legyen $A_n = \{X_n > (1-\varepsilon)\log n\}$. Ekkor az A_n, $n = 1, 2, \ldots$ események függetlenek, hiszen az X_n, $n = 1, 2, \ldots$ változók függetlenek és

$$\mathbf{P}\{A_n\} = \mathbf{P}\{X_n > (1-\varepsilon)\log n\} = \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)\log n} = n^{-(1-\varepsilon)}.$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-\varepsilon)} = \infty$, ezért a második Borel–Cantelli-lemma szerint az A_n események közül egy valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik, azaz az $X_n/\log n$ végtelen sok n-re meghaladja $1-\varepsilon$ értéket, ami éppen azt jelenti, hogy $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n \geq 1-\varepsilon$, m.b. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n \geq 1-\varepsilon$, m.b., vagy másképpen, ha

$$B_\varepsilon = \{\omega : \limsup_{n\to\infty} X_n/\log n \geq 1-\varepsilon\},$$

akkor $\mathbf{P}\{B_\varepsilon\} = 1$. Legyen $\varepsilon_n \downarrow 0$ egy 0-hoz tartó monoton csökkenő sorozat, és $B := \cap_{n=1}^\infty B_{\varepsilon_n}$. Megszámlálható sok 1 mértékű esemény metszete is 1 mértékű, így $\mathbf{P}\{B\} = 1$. Ugyanakkor, B éppen az az esemény, ahol $\limsup_n X_n/\log n \geq 1$. Ezzel az egyik irány kész.

Azt kell még belátni, hogy $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n \leq 1$ m.b. Legyen megint $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített, és legyen $C_n = \{X_n > (1+\varepsilon)\log n\}$. Ekkor

$$\mathbf{P}\{C_n\} = \mathbf{P}\{X_n > (1+\varepsilon)\log n\} = \mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\log n} = n^{-(1+\varepsilon)},$$

és így $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{C_n\} < \infty$. Az első Borel–Cantelli-lemma szerint a C_n események közül egy valószínűséggel csak véges sok következik be. *Vegyük észre, hogy itt nincs szükségünk a függetlenségre!* Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n < 1+\varepsilon$ m.b. Jelölje D_ε a $\limsup_{n\to\infty} X_n/\log n < 1+\varepsilon$ eseményt! Megmutattuk, hogy $\mathbf{P}\{D_\varepsilon\} = 1$. Legyen $\varepsilon_n \downarrow 0$ egy 0-hoz tartó monoton csökkenő sorozat, és $D := \cap_{n=1}^\infty D_{\varepsilon_n}$. Megszámlálható sok 1 mértékű esemény metszete is 1 mértékű, így $\mathbf{P}\{D\} = 1$. Ugyanakkor, D éppen az az esemény, ahol $\limsup_n X_n/\log n \leq 1$. Ezzel a másik irány is kész.

2.6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független nemnegatív egész értékű véletlen változók. Mutassuk meg, hogy az $X_1 + X_2 + \cdots$ sor akkor és csakis akkor konvergens m.b., ha

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\{X_n > 0\} < \infty\,.$$

2.7. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független standard normális véletlen változók. Mutassuk meg, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1 \quad \text{m.b.}$$

Segítség. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{x}\varphi(x).$$

2.8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $p \in (0,1)$ esetén annak a valószínűsége, hogy $\mathbb{Z}^2$ élperkolációjában van végtelen komponens, az 0 vagy 1. (Azaz a négyzetrács minden élét egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartom, $1-p$ valószínűséggel pedig eldobom.)

2.9. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyek közös eloszlásfüggvénye $\mathbf{P}\{X \le x\} = 1 - 1/x$, ha $x > 1$, különben 0. Igazoljuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n \log n} = \infty \quad \text{m.b.}$$

2.10. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} X_i$$

végtelen sor majdnem biztosan konvergens, ha $\mathbf{P}\{X = 1\} < 1$.

2.11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Uniform$(0,1)$ véletlen változók. Mutassuk meg hogy az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat torlódási pontjainak halmaza $[0,1]$ m.b.

2.12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Adjunk meg egy konkrét a_n sorozatot, melyre $n \to \infty$ esetén $a_n \uparrow \infty$ és

$$\mathbf{P}\{X_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ végtelen sok } n\text{-re}\} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \varepsilon > 0, \\ 1, & \text{ha } \varepsilon \le 0. \end{cases}$$

2.13. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ egy végtelen érmedobássorozat. Jelölje ℓ_n az n-edik lépéssel kezdődő 0-futam hosszát, azaz $\ell_n = k$, ha $X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+k-1} = 0$, és $X_{n+k} = 1$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{\ell_n \ge r\} = 2^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$. Továbbá, ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-r_n} < \infty$, akkor

$$\mathbf{P}\{\ell_n \ge r_n \text{ végtelen sokszor }\} = 0.$$

Következményként igazoljuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{\log_2 n} \le 1\} = 1.$$

([2] Example 4.1 p.53)

2.14. Folytatás. Igazoljuk, hogy $r_n \in \mathbb{N}$ monoton növő sorozat esetén ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-r_n}/r_n = \infty$ akkor

$$\mathbf{P}\{\ell_n \ge r_n \text{ végtelen sokszor }\} = 1.$$

Következményként

$$\mathbf{P}\{\frac{\ell_n}{\log_2 n} \geq 1 \text{ végtelen sokszor}\} = 1,$$

és így a két feladatból együtt

$$\mathbf{P}\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_n}{\log_2 n} = 1\} = 1.$$

([2] Example 4.1 p.53)

2.15. Szentpétervári paradoxon. Péter addig dobál egy szabályos érmét, míg fej nem lesz. Ha ez a k-adik dobásra következik be először, akkor fizet Pálnak 2^k dukátot. Ekkor, ha X jelöli Pál nyereményét, akkor $\mathbf{P}\{X = 2^k\} = 1/2^k$. Mennyi $\mathbf{E}(X)$? Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független szentpétervári változók. Ezekre teljesül a következő gyenge törvény (Feller, 1945):

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n\log n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. Mutassuk meg, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n\log n} = \infty \quad \text{m.b.},$$

azaz a megfelelő erős törvény nem teljesülhet.

2.16. Tekintsünk egy végtelen fej–írás sorozatot. Jelölje A_n azt az eseményt, hogy az n hosszú sorozatban van $1/2\log_2 n$ egymás utáni fej, B_n pedig azt az eseményt, hogy van $3\log_2 n$ egymás utáni fej. Igazoljuk, hogy egy valószínűséggel A_n véges sok n kivételével bekövetkezik, ugyanakkor B_n csak véges sok n-re következik be! *Erdős–Rényi: On a new law of large numbers*

3. Vektorváltozók

Vektorváltozók, abszolút folytonos és diszkrét eloszlások, sűrűségfüggvény, függetlenség, véletlen változók transzformációi

Az $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvényt *véletlen vektornak* nevezzük, ha mérhető, azaz minden $B \in \mathcal{B}^d$ d-dimenziós Borel-halmaz inverz képe $\mathcal{A}$-beli. Ez pontosan akkor teljesül, ha minden komponens véletlen változó (miért?).

A véletlen vektor egyetlen komponensének eloszlását nevezzük *peremeloszlásnak.* Az $\mathbf{X}$ véletlen vektor *eloszlásfüggvénye*, vagy az $X_1, \ldots, X_d$ változók *együttes eloszlásfüggvénye* az

$$F(x_1, \ldots, x_d) = \mathbf{P}\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d\}$$

függvény. Egy d-változós függvény pontosan akkor eloszlásfüggvény, ha

(1) minden koordinátájában jobbról folytonos és monoton növő (nemcsökkenő);

(2) minden i-re és minden rögzített $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d$ valós számok esetén $\lim_{x \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_d) = 0$ teljesül;

(3) $\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_d \to \infty} F(x_1, \ldots, x_d) = 1$;

(4) F megváltozása minden téglatesten ≥ 0.

[Az egydimenziós esetben (4) következik a monotonitásból, de magasabb dimenzióban nem (lásd 3.1. Feladat).]

Az F eloszlásfüggvény által indukált μ_F Lebesgue–Stieltjes-mérték az egydimenziós esethez hasonlóan definiálható [a balról nyitott jobbról zárt téglák most is félalgebrát alkotnak; egy ilyen tégla mértéke legyen F megváltozása].

Az $\mathbf{X}$ véletlen vektor *eloszlása folytonos*, ha eloszlásfüggvénye abszolút folytonos, azaz van olyan $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ valós mérhető függvény, hogy $\mu_F(B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x$, minden $B \in \mathcal{B}^d$ d-dimenziós Borel-halmazra. Nyilván f csak Lebesgue-m.m. egyértelműen meghatározott; ezt nevezzük $\mathbf{X}$ *sűrűségfüggvényének.*

Az $\mathbf{X}$ véletlen változó *diszkrét*, ha μ_F-nek van megszámlálható tartója, azaz vannak $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ $\mathbb{R}^k$-beli pontok, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(\{\mathbf{x}_n\}) = 1$.

Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véletlen változók *függetlenek*, ha $\mathbf{P}\{X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{X_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{X_n \in B_n\}$ teljesül minden $B_1, \ldots, B_n$ Borel-halmazra. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy az együttes eloszlásfüggvény faktorizálható, azaz $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1) \cdots F(x_n)$. Könnyen igazolható, hogy folytonos eloszlások esetén ez az együttes sűrűségfüggvény faktorizálhatóságával ekvivalens.

Ha X folytonos, sűrűségfüggvény-e f és $\mathbf{P}\{X \in I\} = 1$, ahol I véges vagy végtelen intervallum és h szigorúan monoton (növő vagy csökkenő), folytonosan differenciálható függvény I-n, $h'(x) \neq 0$, $x \in I$, akkor az $Y = h(X)$ változó is folytonos és sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(h^{-1}(y))}{|h'(h^{-1}(y))|}, & \text{ha } y \in h(I), \\ 0, & \text{ha } y \notin h(I), \end{cases}$$

3.1. Eloszlásfüggvény-e?

(a) $H(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+y)}}$;

(b) $H(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}}$.

3.2. Határozzuk meg a polinomiális eloszlás peremeloszlásait!

Megjegyzés. Az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ véletlen vektor polinomiális eloszlású, ha

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n\} &= \binom{m}{k_1, k_2, \ldots, k_n} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} \\ &\quad \times \Big(1 - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)^{m - \sum_{j=1}^{n} k_j},\end{aligned}$$

ahol $k_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} k_j \leq m,\ p_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_j \leq 1$, és

$$\binom{m}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{m!}{k_1! k_2! \cdots k_n! (m - \sum_{j=1}^{n} k_j)!}\,.$$

3.3. Legyen $U(x,y) = F(x)G(y)[1+\alpha(1-F(x))(1-G(y))]$, ahol $F(x)$, $G(x)$ eloszlásfüggvények és $|\alpha| \leq 1$. Mutassuk meg, hogy $U(x,y)$ eloszlásfüggvény, melynek peremeloszlásai $F(x)$ és $G(y)$!

3.4. Legyen az (X, Y) véletlen változó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

3.5. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha}(x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

3.6. Mutassuk meg, hogy a következő függvények sűrűségfüggvények!

(a) A λ paraméterű, p-ed rendű Γ–eloszlás ($p > 0,\ \lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

(b) Az (a,b) paraméterű Cauchy–eloszlás ($a > 0, b \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-b)^2}.$$

(c) Kétdimenziós Γ–eloszlás $(p, q > 0)$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, & \text{ha } 0 < x < y < \infty\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

3.7. A béta–függvény (vagy elsőfajú `Euler`–féle integrál).

(a) Bizonyítsuk be, hogy $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t < \infty,\ x > 0, y > 0$, és $B(x,y) = B(y,x)$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $x > 0, y > 1$ esetén $B(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$.

(c) Ha $y \in \mathbb{N}$, akkor $B(x,y) = \frac{(y-1)!}{x(x+1)\ldots(x+y-1)}$.

(d) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra

$$B(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}B(x,y+n).$$

(e) Igazoljuk a béta–függvény alábbi végtelen szorzat előállítását:

$$B(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)y(y+1)\ldots(y+n-1)}.$$

3.8. A gamma–függvény (vagy másodfajú `Euler`–féle integrál).

(a) Mutassuk meg, hogy $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty,\ x > 0$, és tetszőleges $p > 0$ esetén $\Gamma(x) = p^x \int_0^\infty u^{x-1}\mathrm{e}^{-up}\,\mathrm{d}u$.

(b) Mutassuk meg, hogy $p^x B(x,p+1) < \Gamma(x) < (p+x+1)^x B(x,p+1)$.

(c) Mutassuk meg, hogy

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

(d) Bizonyítsuk be, hogy $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3.9. Az alábbi $f(\cdot)$, $h(\cdot,\cdot)$ függvények esetében határozzuk meg c állandó értékét, hogy sűrűségfüggvényt kapjunk! Többdimenziós esetben adjuk meg a peremeloszlásokat!

(a) A (p,q)-rendű B–eloszlás $(p,q>0)$:

$$f(x)=\begin{cases} cx^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{ha } 0<x<1\,,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

(b) Kétdimenziós B–eloszlás $(p,q,r>0)$:

$$h(x,y)=\begin{cases} cx^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}, & \text{ha } 0<x,y \text{ és } x+y<1\,,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

(c) $h(x,y)=\begin{cases} c\,\mathrm{e}^{-x}, & \text{ha } 0\le x,\ 0<y<2,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$

(d) $h(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-cx}, & \text{ha } 0<y<x,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$

3.10. Jelölje $\varphi(n)$ az Euler-féle függvényt, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma. Bizonyítsuk be valószínűségszámítási úton, hogy

$$\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

3.11. Adjunk példát olyan A,B,C eseményekre, melyek páronként függetlenek, de nem függetlenek! Adjunk példát A, B, C és D eseményekre, hogy bármely három közülük független, de mind a négy nem független!

3.12. Mutassuk meg, hogy események egy $\{A_j : j\in J\}$ halmaza pontosan akkor független, ha a megfelelő indikátorváltozók függetlenek.

3.13. Legyenek $X_1,X_2,\dots,X_n$ független véletlen változók, és $g_k(\cdot)$, $k=1,2,\dots,n$ Borel–mérhető függvények. Bizonyítsuk be, hogy $g_1(X_1),g_2(X_2)$, …, $g_n(X_n)$ véletlen változók is függetlenek!

3.14. Láttuk, hogy abszolút folytonos véletlen vektorváltozó peremeloszlásai abszolút folytonosak. Igazoljuk, hogy ez nem megfordítható, azaz mutassunk X,Y abszolút folytonos véletlen változókat, melyek együttes eloszlása nem abszolút folytonos!

3.15. Lássuk be, hogy ha az (X,Y) véletlen vektorváltozó abszolút folytonos, akkor $\mathbf{P}(X=Y)=0$. Az együttes sűrűségfüggvénnyel írjuk fel a $\mathbf{P}(X\le Y)$ valószínűséget!

3.16. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X=Y)$ és $\mathbf{P}(X\le Y)$ valószínűségeket, ha

(a) Ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ független véletlen változó;

(b) Ha X, Y független geometriai eloszlású véletlen változók;

(c) Ha X és Y diszkrét független véletlen változók, melyek lehetséges értékei ugyanazok az $x_1, x_2, \ldots$ számok. Továbbá $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$ és $\mathbf{P}(Y = x_k) = q_k$.

3.17. Legyenek X és Y független $\text{Exp}(\lambda)$ véletlen változók. Igazoljuk, hogy $|X - Y|$ is exponenciális eloszlású és adjuk meg a paraméterét is!

Megoldás. Meg kell határoznunk $|X-Y|$ eloszlásfüggvényét, azaz az $F(z) = \mathbf{P}\{|X - Y| \le z\}$ valószínűségeket. Mivel $|X - Y| \ge 0$ ezért feltehetjük, hogy $z \ge 0$. $F(z)$ helyett $1-F(z) = \mathbf{P}\{|X-Y| > z\}$ értéket számoljuk ki. Legyen

$$S_z = \{(x, y) \,:\, |x - y| > z, x \ge 0, y \ge 0\},$$

és jelölje $f(x, y)$ az (X, Y) vektor együttes sűrűségfüggvényét. Ekkor

$$\mathbf{P}\{|X - Y| > z\} = \mathbf{P}\{(X, Y) \in S_z\} = \iint_{S_z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A függetlenség miatt $f(x, y) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot \lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}$, ha $x \ge 0$ és $y \ge 0$, és 0 különben. Ezért a szimmetria és a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}
\iint_{S_z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{S_z} \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_z^\infty \left[\int_0^{x-z} \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= 2\int_z^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda(x-z)}\right]\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda z}.
\end{aligned}$$

Tehát $F(z) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda z}$, azaz $|X-Y|$ is exponenciális eloszlású λ paraméterrel.

Megjegyzés. Valójában az S_z halmaz (X, Y) vektor által indukált *kétdimenziós* $\mu_{(X,Y)}$ Lebesgue–Stieltjes-mértékét határoztuk meg. Ez abszolút folytonos esetben az $f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ mérték, azaz formálisan $\mu_{(X,Y)}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3.18. Legyenek X és Y független standard normálisok. Tekintsük a polárkoordináta-transzformációval kapott (R, Θ) vektorváltozót, ahol $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ és $\mathrm{tg}\Theta = X/Y$. Határozzuk meg (R, Θ) együttes eloszlását! Igazoljuk, hogy ezek függetlenek!

Megoldás. Meg kell határoznunk az (R, Θ) vektorváltozó eloszlásfüggvényét. Világos, hogy $R \geq 0$ és $\Theta \in [0, 2\pi)$. Legyen tehát $r > 0$ és $\alpha \in (0, 2\pi)$. A standard normális sűrűségfüggvény $\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, és mivel a változók függetlenek, az együttes sűrűségfüggvény $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2/2-y^2/2}/(2\pi)$. Legyen

$$S_{r,\alpha} = \left\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq r^2, \frac{x}{y} \leq \tan\alpha\right\}.$$

Ez éppen azon $(x, y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ pontok halmaza, melyek polárkoordinátás alakjában $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq r$ és $\varphi \leq \alpha$. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{R \leq r, \Theta \leq \alpha\} &= \mathbf{P}\{(X, Y) \in S_{r,\alpha}\} \\ &= \iint_{S_{r,\alpha}} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

A integrálási tartomány alakjából és integrandusból is látszik, hogy érdemes áttérni polárkoordinátás alakra; azaz legyen $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. A transzformáció Jacobi-mátrixának determinánsa ρ, így

$$\begin{aligned}\iint_{S_{r,\alpha}} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\alpha \int_0^r \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-frac\rho^2 2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right).\end{aligned}$$

Az eloszlásfüggvény alakjából látjuk ($\alpha = 2\pi$ ill. $r \to \infty$ helyettesítéssel), hogy a két peremeloszlás

$$\mathbf{P}\{R \leq r\} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}, \quad \mathbf{P}\{\Theta \leq \alpha\} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

és az is világos, hogy R és Θ függetlenek, valamint Θ egyenletes eloszlású a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

3.19. Legyenek X és Y független standard normálisok. Határozzuk meg az $XY/\sqrt{X^2 + Y^2}$ eloszlását!

3.20. Legyenek X és Y független standard normálisok. Igazoljuk, hogy $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek! [Ez a tulajdonság karakterizálja is a normálist, de erről majd később, a karakterisztikus függvényeknél, 6.13. Feladat.]

3.21. Egyenletes eloszlás szerint válasszunk egy pontot az egységgömbön. A szélességi és hosszúsági körök megadásával a véletlen pont leírható (Θ, Ψ) párral, ahol $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in (-\pi, \pi]$. Határozzuk meg (Θ, Ψ) eloszlását!

3.22. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független véletlen változók $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eloszlásfüggvénnyel.

(a) Adjuk meg az $m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ véletlen változók eloszlását!

(b) Tegyük fel, hogy a közös eloszlás E(0,1). Adjunk szükséges és elegendő feltételt az $\{a_n\}$ sorozatra, hogy $\mathbf{P}(m_n \geq a_n) \to 1$ és $\mathbf{P}(M_n \leq 1-a_n) \to 1$.

3.23. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független exponenciális eloszlású véletlen változók, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterekkel és $X = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Igazoljuk, hogy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$, és

$$\mathbf{P}(X = X_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Megoldás. Feltehetjük, hogy $k = 1$. Ekkor

$$\{X = X_1\} = \{X_1 \leq X_2, X_1 \leq X_3, \ldots, X_1 \leq X_n\} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in S_1\},$$

ahol

$$S_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\}.$$

Mivel a változóink függetlenek, ezért az együttes sűrűségfüggvény

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) \\ &= \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \ldots \lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x_n} I_{x_1 > 0}(x_1) \ldots I_{x_n > 0}(x_n), \end{aligned}$$

tehát a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X = X_1\} &= \int \ldots \int_{S_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \int\!\!\int_{S_1 \cap [0,\infty)^n} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \ldots \lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x_n} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Fubini tételével a fenti n-szeres integrál egyszerűen számolható. Mivel x_1 a legkisebb, ezért a többi változó rögzített x_1 esetén az (x_1, ∞) intervallumon változik, x_1 pedig a $(0, \infty)$-en. Tehát az előbbi integrál

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left[\int_{x_1}^\infty \int_{x_1}^\infty \ldots \int_{x_1}^\infty \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \ldots \lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x_n} \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \right] \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \left[\int_{x_1}^\infty \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{x_1}^\infty \lambda_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x_n} \mathrm{d}x_n \right] \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \mathrm{e}^{-\lambda_2 x_1} \ldots \mathrm{e}^{-\lambda_n x_1} \mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}, \end{aligned}$$

amint állítottuk.

3.24. Adjunk példát olyan X és Y exponenciális eloszlású véletlen változókra, melyek

(a) minimuma exponenciális, de nem az előző feladatban megadott paraméterrel;

(b) minimuma nem exponenciális;

(c) maximuma exponenciális.

3.25. Mit mondhatunk geometriai eloszlású véletlen változók minimumáról és maximumáról?

3.26. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású, abszolút folytonos véletlen változók. Mennyi a valószínűsége, hogy X_1 nagyobb az összes többinél?

3.27. Egy megbeszélésre hivatalos n ember. Mindenki 5 óra és 5:10 között érkezik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Amint valaki megérkezik és csönget, α idő telik el és a házigazda beengedi. Ha eközben mások is érkeznek, akkor azok egyszerre mennek be a korábban érkezővel. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki egyszerre érkezik?

3.28. Legyen $X \sim$ E(-1,1) eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg a következő véletlen változók sűrűségfüggvényeit:

(a) $|X|$;

(b) X^2;

(c) e^X.

3.29. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg a következő véletlen változók sűrűségfüggvényeit:

(a) $2X + 3$;

(b) X^3;

(c) $\sqrt{X}$.

3.30. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \sim \mathrm{E}(-\pi/2, \pi/2)$ eloszlású, akkor $\mathrm{tg}X$ az (1,0) paraméterű Cauchy–eloszlású véletlen változó.

3.31. Bizonyítsuk be, hogy ha X az (1,0) paraméterű Cauchy–eloszlású véletlen változó, akkor

(a) $\frac{1}{X}$;

(b) $\frac{2X}{1-X^2}$;

(c) $\frac{3X-X^3}{1-3X^2}$

is Cauchy– eloszlású.

3.32. Legyenek X és Y független egyenletes eloszlásúak [0,1]-en, és legyen $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Határozzuk meg R eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

3.33. Legyen $X = \min\{U, V\}$, $Y = \max\{U, V\}$, ahol U és V függetlenek és egyenletes eloszlásúak [0,1]-en. Határozzuk meg

(a) X

(b) $1 - Y$

(c) $Y - X$

eloszlását!

3.34. Tegyük fel, hogy (X, Y) egyenletes eloszlású az $\{(x, y) : 0 < |y| < x < 1\}$ tartományon. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a marginális sűrűségeket! Függetlenek-e X és Y?

3.35. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x, y > 0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Függetlenek-e X és Y?

3.36. Legyen X és Y együttes sűrűsége

$$f(x, y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)\mathrm{e}^{-y}, & -y \le x \le y, y > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg c értékét és igazoljuk, hogy Y gamma eloszlású!

3.37. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x, y \ge 0$;

(b) $f(x, y) = 6xy^2$, ha $x, y \ge 0$ és $x + y \le 1$;

(c) $f(x, y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0, 1)$;

(d) $f(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)^2$, ha $x, y \in (0, 1)$.

Határozzuk meg a marginálisokat! Függetlenek-e a változók?

4. Véletlen változók transzformáltjai

Véletlen változók összegének, szorzatának, hányadosának eloszlása, konvolúció

Legyenek X és Y független véletlen változók F és G eloszlásfüggvénnyel. A $Z = X + Y$ változó eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathbf{P}\{Z \leq x\} = \mathbf{P}\{X + Y \leq x\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x - y)\mathrm{d}G(y) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y)\mathrm{d}F(y). \end{aligned}$$

A H eloszlásfüggvényt az F és G függvények Lebesgue–Stieltjes-konvolúciójának nevezzük. Ha még X és Y folytonosak is f és g sűrűségfüggvénnyel, akkor Z is folytonos és sűrűsége

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y)f(y)\mathrm{d}y.$$

A h függvényt a f és g függvény konvolúciójának nevezzük.

Hasonlóan meghatározható független véletlen változók hányadosának eloszlása is. Legyenek X és Y folytonos véletlen változók f és g sűrűséggel. Ekkor a $Z = X/Y$ változó is folytonos és sűrűsége

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(xv)|v|g(v)\mathrm{d}v.$$

4.1. Legyenek X és Y függetlenek, melyek 1,2,3 és 4 értéket vesznek fel rendre $0,1,\ 0,2,\ 0,3$ és $0,4$ valószínűséggel. Adjuk meg $X + Y$ eloszlását!

4.2. Legyenek X és Y független p-paraméterű geometriai eloszlású változók. Adjuk meg $X + Y$ eloszlását!

4.3. Legyenek X és Y független Poisson eloszlású véletlen változók λ és μ paraméterekkel. Határozzuk meg $Z = X + Y$ eloszlását!

Megoldás. Diszkrét esetben egyszerűbben is meghatározhatjuk az eloszlást, nem kell a konvolúciós formulát használnunk. Világos, hogy Z nemnegatív egész értékeket vehet fel, és a függetlenség és a Poisson eloszlás definíciója szerint

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Z=k\} &= \mathbf{P}\{X=\ell, Y=k-\ell,\ \text{valamilyen } \ell\in\{0,1,\dots,k\} \text{ esetén } \} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k}\mathbf{P}\{X=\ell, Y=k-\ell\} = \sum_{\ell=0}^{k}\mathbf{P}\{X=\ell\}\mathbf{P}\{Y=k-\ell\} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!}\mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\lambda^\ell\mu^{k-\ell} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Tehát Z egy $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó.

4.4. Legyenek X, Y független, a $(0,1)$-en egyenletes eloszlású véletlen változók. Határozzuk meg $Z = X + Y$ eloszlását!

Megoldás. Mivel az egyenletes eloszlás abszolút folytonos eloszlás, $f(x) = I_{[0,1]}(x)$ sűrűségfüggvénnyel, így használhatjuk a sűrűségfüggvényre vonatkozó formulát. Eszerint

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 I_{[0,1]}(x-y)\mathrm{d}y.$$

Mivel $0 \le x-y \le 1 \Leftrightarrow x-1 \le y \le x$, így $g(x) = 0$, ha $x \notin [0,2]$, és

$$g(x) = \int_0^1 I_{[0,1]}(x-y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^x 1\mathrm{d}y = x, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ \int_{x-1}^1 1\mathrm{d}y = 2-x, & \text{ha } 1 \le x \ge 2. \end{cases}$$

4.5. Határozzuk meg az alábbi független véletlen változók összegének eloszlását!

(a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$;

(b) $X, Y, Z \sim$ E(0,1);

(c) $X \sim$ Poisson(λ), $Y \sim$ E(0,1).

4.6. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független Exp(λ) eloszlású véletlen változók. Bizonyítsuk be, hogy az $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ véletlen változó sűrűségfüggvénye

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ esetben igaz az állítás, és tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén igaz. A konvolúciós formula, és az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_n(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x y^{n-1} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n)!} \mathrm{e}^{-\lambda x},
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

4.7. Az n-szabadsági fokú χ^2-eloszlás. Legyenek $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ független N(0,1) eloszlású véletlen változók. Bizonyítsuk be, hogy az $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ véletlen változó. sűrűségfüggvénye

$$f_n(x) = \frac{x^{n/2-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, \quad x > 0.$$

Határozzuk meg $\sqrt{X}$ sűrűségfüggvényét (n-szabadsági fokú χ-eloszlás) !

4.8. Az n-szabadsági fokú Student-eloszlás. Legyen

$$T = \frac{\sqrt{n} X_0}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}},$$

ahol $X_0, X_1, \ldots, X_n$ független N(0,1) véletlen változók. Mutassuk meg, hogy T sűrűségfüggvénye

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.9. Az n és m szabadsági fokú F-eloszlás. Legyenek $X \sim \chi^2(n)$ és $Y \sim \chi^2(m)$ független véletlen változó. Határozzuk meg $mX/(nY)$ véletlen változó sűrűségfüggvényét!

4.10. Legyenek X, Y független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók, F eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg az $(X+Y, \max\{X, Y\})$ vektorváltozó eloszlását!

4.11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Továbbá legyen $\mathbf{P}(X_i = k) = 1/3,\ k \in \{0, 1, 2\}$. Adjuk meg $Y = X_1 X_2 \ldots X_n$ eloszlását!

4.12. Legyen F egy nemnegatív véletlen változó eloszlásfüggvénye. Igazoljuk, hogy $x > 0$ esetén

$$F^2(x/2) + 2\int_{x/2}^{x} F(x-u)F(\mathrm{d}u) = F^{*2}(x),$$

és $0 \leq z \leq x \leq 2z$ esetén

$$F^2(x/2) + 2\int_{x/2}^{z} F(x-u)F(\mathrm{d}u) = F(z)F(x-z) + \int_{x-z}^{z} F(x-u)F(\mathrm{d}u).$$

(Ez nem túl szórakoztató, de segít begyakorolni a Lebesgue–Stieltjes integrállal való számolást.)

Megjegyzés. Ennél a feladnál szükség van a parciális integrálás formulájára. Eszerint

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}G(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)\mathrm{d}F(x).$$

Ennek bizonyítása megtalálható a [6] jegyzetben. Vegyük észre, hogy abban az esetben mikor F, G abszolút folytonosak, akkor a formula a Riemann-féle integrálelméletben ismert parciális integrál formulája. Azt is megjegyezzük, hogy a Lebesgue–Stieltjes-féle általános esetben egyszerűbb megjegyezni a formulát.

4.13. Legyenek X és Y független E(0,1) eloszlású véletlen változók. Adjuk meg XY és X/Y véletlen változó eloszlását!

4.14. Konvolúció általában. Legyen M a komplex Borel-mértékek tere $\mathbb{R}$-en, a $||\mu|| = |\mu|(\mathbb{R})$ normával. Tetszőleges E Borel-mérhető halmaz esetén tekintsük az

$$E_2 = \{(x, y) : x + y \in E\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmazt. Tetszőleges $\lambda, \mu \in M$ mértékek esetén definiáljuk a két mérték konvolúcióját a

$$(\mu \star \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_2)$$

formulával, ahol a $(\mu \times \lambda)$ a szorzatmérték.

(a) Mutassuk meg, hogy $\lambda \star \mu \in M$, és $||\lambda \star \mu|| \leq ||\lambda||\,||\mu||$.

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\int f\,\mathrm{d}\nu = \iint f(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(y),$$

ahol $\nu = \lambda \star \mu$, és $f \in C_0(\mathbb{R})$ (végtelenben eltűnő függvény).

(c) Mutassuk meg, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és disztributív az összeadásra.

(d) Mutassuk meg, hogy

$$(\mu \star \lambda)(E) = \int \mu(E - t)\,\mathrm{d}\lambda(t),$$

ahol $E - t = \{x - t : x \in E\}$.

(e) Mutassuk meg, hogy $\mu \star \lambda$ diszkrét, ha μ és λ is diszkrét, és folytonos, ha μ folytonos. Továbbá $\mu \star \lambda << m$, ha $\lambda << m$, ahol m a Lebesgue-mérték ($m \notin M$!).

(f) Ha $\mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}m$ és $\mathrm{d}\lambda = g\,\mathrm{d}m$, ahol $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, akkor $\mathrm{d}(\lambda \star \mu) = (f \star g)\,\mathrm{d}m$, ahol $(f \star g)(x) = \int f(x - t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a szokásos konvolúció.

([10])

Megjegyzés. A valószínűségszámításban definiált konvolúció a fentinek speciális esete, amikor λ és μ Lebesgue–Stieltjes-mértékek. Az (f) pont a sűrűségfüggvényre vonatkozó formula általánosan.

4.15. Legyenek X_1, X_2, X_3 független Exp(1) eloszlású véletlen változók. Határozzuk meg $(X_2 - X_1, X_3 - X_2)$ együttes sűrűségfüggvényét!

4.16. Legyenek X_1 és X_2 független (1,0) paraméterű Cauchy-eloszlású véletlen változók. Mutassuk meg, hogy

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{1 - X_1 X_2}$$

is (1,0) paraméterű Cauchy-eloszlás.

4.17. Igazoljuk, hogy független standard normálisok hányadosa Cauchy-eloszlású!

4.18. Legyenek X, Y független exponenciális eloszlású véletlen változók 1 paraméterrel. Határozzuk meg $X/(X + Y)$ eloszlását!

4.19. Legyenek γ és γ' független gamma eloszlású véletlen változók (a, c) és (b, c) paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy $\gamma/(\gamma + \gamma')$ eloszlása beta(a, b), és független $\gamma + \gamma'$ változótól, aminek eloszlása gamma$(a + b, c)$. *Bertoin, de folklór*

4.20. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók, és jelölje $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a részletösszegüket. Igazoljuk, hogy az

$$\left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \frac{S_2}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right)$$

véletlen vektor eloszlása tetszőleges rögzített n esetén megegyezik egy [0,1]-en egyenletes eloszlásból vett n elemű rendezett minta eloszlásával, azaz az $(U_1^*, \ldots, U_n^*)$ vektor eloszlásával, ahol $U_1, \ldots, U_n$ független Egyenletes$(0,1)$ véletlen változók, és $U_1^* \le U_2^* \le \ldots \le U_n^*$ ezek sorba rendezése.

Segítség. A sűrűségfüggvények egyenlőségét igazoljuk. Világos, hogy mindkét vektor az $\{0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le 1\}$ térrészbe koncentrált. Világos, hogy a rendezett minta sűrűsége ezen a halmazon konstans $n!$. Vegyünk egy tetszőleges $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ pontot. A

$$\lim_{h_i \to 0, i=1,\ldots,n} \left(2^n \prod_{i=1}^n h_i\right)^{-1} \mathbf{P}\{S_i/S_{n+1} \in (x_i - h_i, x_i + h_i), i = 1, \ldots, n\}$$

határértéket akarjuk meghatározni. Hajtsuk végre az $x_1 + \cdots + x_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n, n+1$ integráltranszformációt, és vegyük észre, hogy elég kis h_i értékek esetén a diszjunkt $((x_i - h_i)u_{n+1}, (x_i + h_i)u_{n+1})$ intervallumokon integrálunk, $i = 1, \ldots, n$. Így azt kapjuk, hogy a fönti limesz

$$= \lim_{h_i \to 0, i=1,\ldots,n} \left(2^n \prod_{i=1}^n h_i\right)^{-1} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n [2h_i u_{n+1}] \mathrm{e}^{-u_{n+1}} \mathrm{d}u_{n+1} = n!.$$

5. Várható érték

Várható érték, momentumok, egyenlőtlenségek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, X egy véletlen változó. Az X véletlen változó *várható értéke*

$$\mathbf{E}(X) = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbf{P}\,.$$

Jelölje F az X eloszlásfüggvényét, és μ_F az F által indukált Lebesgue–Stieltjes-mértéket. Teljesül az ún. transzformációs tétel:

$$\int_\Omega h(X) \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\mathbb{R} h(x) \mathrm{d}F(x) (= \int_\mathbb{R} h(x) \mathrm{d}\mu_X(x)\,,$$

ahol h valós mérhető függvény. Az egyenlőség úgy értendő, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek akkor egyenlők. Az X k-adik momentuma $\mathbf{E}(X^k)$, ill. k-adik centrális momentuma $\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^k)$. Speciálisan a szórásnégyzet a második centrális momentum: $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$.

A *Csebisev-egyenlőtlenséggel* becsülhetjük a várható értéktől való eltérést: $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon\} \leq \mathbf{D}^2(X)/\varepsilon^2$. [Magasabb momentumok létezése esetén a becslés finomítható (lásd 5.32. Feladat) .]

Mivel a várható érték egy integrál, ezért a szokásos tulajdonságok teljesülnek: linearitás; konvergenciatételek: Lebesgue monoton, Lebesgue majoráns; Hölder-, Minkowski-, Jensen-egyenlőtlenség.

Az $(X_1,\ldots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ véletlen vektorváltozó várhatóérték-vektora az $(\mathbf{E}(X_1),\ldots,\mathbf{E}(X_n))$ vektor, kovarianciamátrixa az a $(\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrix, melyre $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \mathbf{E}[(X_i-\mathbf{E}(X_i))(X_j-\mathbf{E}(X_j))]$.

5.1. Egy halastóban N hal van. Kihalászunk M halat, megjelöljük őket, és visszaeresztjük a tóba. Bizonyos idő elteltével, miután jól elkeveredtek, kihalászunk n-et. Ezek között legyen a megjelöltek száma X. A teljes halállomány N meghatározására az $Mn/(X+1)$ becslést használjuk. Számítsuk ki ennek a várható értékét és szórását! Miért nem a logikusabb Mn/X becslést használjuk?

5.2. Határozzuk meg a Poisson, a binomiális, az egyenletes és az exponenciális eloszlás várható értékét és szórását!

5.3. Határozzuk meg $1/(X+1)$ várható értékét, ha

(a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$;

(b) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$;

(c) X geometriai eloszlású;

(d) X hipergeometriai eloszlású.

5.4. Adjunk példát olyan X véletlen változóra, melyre $\mathbf{E}(|X|^\alpha)=\infty$, tetszőleges $\alpha>0$ esetén.

5.5. Legyen (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y)=\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\pi^2y^2}{8\pi^2}}.$$

Függetlenek-e X és Y? Határozzuk meg a várható érték vektort és a kovarianciamátrixot!

5.6. Legyenek X és Y független N(0,1) véletlen változó. Határozzuk meg $\mathbf{E}(|X^2-Y^2|)$ értékét!

5.7. Határozzuk meg X véletlen változó k-adik momentumát, $k=1,2,\ldots$, ha

(a) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$;

(b) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

(c) $X \sim \chi^2(n)$.

5.8. Számítsuk ki az ötöslottón kihúzott legnagyobb és legkisebb szám várható értékét és szórását!

5.9. Határozzuk meg a polinomiális és polihipergeometrikus eloszlás várható érték vektorát és kovarianciamátrixát!

Megjegyzés. Polihipergeometrikus eloszlás:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \quad & \ldots, X_n = k_n) \\ &= \binom{M}{m}^{-1} \binom{M_1}{k_1} \binom{M_2}{k_2} \cdots \binom{M_n}{k_n} \binom{M - \sum_{i=1}^n M_i}{m - \sum_{i=1}^n k_i},\end{aligned}$$

ahol $k_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n k_i \leq m$ és $M_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n M_i \leq M, m \leq M$.

5.10. Mutassuk meg, hogy ha X és Y függetlenek akkor korrelálatlanok. Példával igazoljuk, hogy a megfordítás nem igaz!

5.11. Mutassuk meg, hogy $|r(X, Y)| = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $Y = aX + b$, valamilyen $a, b \in \mathbb{R}$ állandókra.

5.12. Legyen $f(x, y) = c(x + y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, egy (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Mennyi c értéke, peremeloszlások, várható érték vektor, kovarianciamátrix, Xe^Y várható értéke.

5.13. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X + Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

5.14. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x, y > 0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

5.15. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$;

(b) $f(x, y) = 6xy^2$, ha $x, y \geq 0$ és $x + y \leq 1$;

(c) $f(x, y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0, 1)$;

(d) $f(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2$, ha $x, y \in (0,1)$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

5.16. Legyen az (X,Y) véletlen vektor sűrűsége $f(x,y) = 3/x^5$, ha $x \geq y \geq 0$, $x \geq 1$. Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

5.17. Legyenek X és Y független standard normálisok. Határozzuk meg az $(X-Y, X+Y)$ vektor várhatóérték-vektorát és kovarianciamátrixát!

5.18. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ugyanazon a valószínűségi mezőn definiált véletlen változók. Mutassuk meg, hogy a véletlen változók pontosan akkor függetlenek, ha tetszőleges $t_1, t_2, \ldots, t_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvények esetén

$$\mathbf{E}\left(t_1(X_1)t_2(X_2)\ldots t_n(X_n)\right) = \mathbf{E}\left(t_1(X_1)\right)\mathbf{E}\left(t_2(X_2)\right)\ldots\mathbf{E}\left(t_n(X_n)\right).$$

5.19. Legyen X véletlen változó. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathbf{E}(X) < \infty$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} x\left[1 - F(x)\right] = 0 \quad \text{és} \lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0;$$

(b) ha $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \int_{|y|>x} \mathrm{d}F(y)}{\int_{|y|<x} y^2 \,\mathrm{d}F(y)} = 0.$$

Megoldás. Az (a) részt bizonyítjuk, a (b) hasonlóan megy. Először integrálalakba írjuk az $x[1-F(x)]$ kifejezést, majd a határból leválasztjuk x-et. Ha $x > 0$, akkor

$$x\left[1 - F(x)\right] = x\int_x^\infty \mathrm{d}F(y) = \int_0^\infty xI_{\{y>x\}}(y)\mathrm{d}F(y).$$

Vegyük észre, hogy minden $y > 0$ esetén $xI_{\{y>x\}}(y) \to 0$, amint $x \to \infty$, hisz ha $x > y$ akkor az integrandus 0. Tehát csak azt kell belátni, hogy az integrálás és a határátmenet felcserélhető, amit Lebesgue Majoráns Konvergenciatételével bizonyítunk. Világos, hogy $xI_{\{y>x\}}(y) \leq y$ minden x-re, és y integrálható $\mathrm{d}F(y)$ szerint, hiszen $\int_{\mathbb{R}} |y|\mathrm{d}F(y) = \mathbf{E}|X| < \infty$. Ezzel az állítást beláttuk.

5.20. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók, melyre $\mathbf{E}X < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{E} \max_{1\le k\le n} X_k = 0.$$

5.21. Legyen X nemnegatív egész értékű véletlen változó, és tegyük föl, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \ge i).$$

5.22. Legyen X nemnegatív véletlen változó F eloszlásfüggvénnyel, és tegyük föl, hogy $\mathbf{E}X < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty [1 - F(x)]\mathrm{d}x$$

5.23. Mutassuk meg, hogy nemnegatív X változó esetén

$$\mathbf{E}X^p = \int_0^\infty px^{p-1}[1 - F(x)]\mathrm{d}x.$$

Megoldás. Ez a Fubini-tétel egyszerű alkalmazásával igazolható, hiszen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X^p &= \int_\Omega X^p \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\Omega \int_0^\infty I_{\{x<X(\omega)\}}(x) px^{p-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_0^\infty px^{p-1}[1 - F(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

5.24. Legyenek X és Y nemnegatív, nem feltétlenül független véletlen változók. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}XY = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{P}(X > x, Y > y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5.25. Legyenek X és Y független, nemnegatív egész értékű véletlen változó. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathbf{E}(X) < \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(\min(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)\mathbf{P}(Y \geq i);$$

(b) ha $\mathbf{E}(X) < \infty,\ \mathbf{E}(Y) < \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(\max(X,Y)) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \mathbf{P}\{X \leq i\}\mathbf{P}\{Y \leq i\}\right].$$

5.26. Legyen X nemnegatív egész értékű véletlen változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}\{X > i\} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)].$$

5.27. Legyen X (1,0) paraméterű Cauchy-eloszlású véletlen változó. Számítsuk ki a $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon})$ határértéket!

5.28. Legyen X nemnegatív véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(X^{-1})$ létezik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(X^{-1}) \geq \mathbf{E}(X)^{-1}$.

5.29. Fordított Csebisev. Legyen $Y \geq 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{Y > 0\} \geq \frac{(\mathbf{E}Y)^2}{\mathbf{E}Y^2}!$$

Általánosabban: Legyen Y nemnegatív és $c \in (0,1)$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{Y > c\mathbf{E}Y\} \geq (1-c)^2\frac{(\mathbf{E}Y)^2}{\mathbf{E}Y^2}!$$

([7])
Segítség. Használjuk a Cauchy–Schwartz egyenlőtlenséget az $YI_{Y\geq 0}$ változóra.

5.30. Általánosított Markov-egyenlőtlenség. Legyenek $A_1,\ldots,A_n$ tetszőleges események. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}\left\{\text{legalább } k \text{ bekövetkezik az } A_1,\ldots,A_n \text{ események közül}\right\} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{A_i\}.$$

5.31. Legyen f nemnegatív folytonos függvény, $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók, és $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{\infty} f(S_i) = \int_0^{\infty} f(y)\mathrm{d}y.$$

5.32. Legyen $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő függvény és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(f(|X-m)|)) < \infty$, ahol $m = \mathbf{E}(X)$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}(|X-m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(f(|X-m|))}{f(\varepsilon)}.$$

5.33. Egyenlőség a Csebisev-egyenlőtlenségben. Legyen X olyan, hogy $\mathbf{P}\{X = \pm k\} = 1/(2k^2)$, $\mathbf{P}\{X = 0\} = 1 - 1/k^2$. Adjuk meg a várható értéket és a szórást! Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}\{|X| \geq k\} = 1/k^2$, azaz a Csebisev-egyenlőtlenség most egyenlőség.

5.34. A Weierstrass–féle approximációs tétel szerint a polinomok sűrűn vannak a $[0,1]$ (vagy akármilyen más) intervallumon folytonos függvények terében. A Csebisev–egyenlőtlenség egy szép alkalmazása erre ad konstruktív bizonyítást.

Legyen $f \in C[0,1]$. Az f függvényhez tartozó n-ed fokú Bernstein–polinom

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(k/n\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Igazoljuk, hogy $\sup_{x\in[0,1]}|f(x) - B_n(x)| \to 0$!

5.35. Legyen $f \in C^1[0,1]$. Mutassuk meg, hogy

$$\|f - B_n\| \leq \varepsilon\|f'\| + 2\frac{\|f\|}{n\varepsilon^2},$$

ahol $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Igazoljuk, hogy $\|f - B_n\| = O(n^{-1/3})$.

6. Karakterisztikus függvény

Karakterisztikus függvény, momentumgeneráló függvény

Az X véletlen változó, vagy a hozzátartozó F eloszlás *karakterisztikus függvénye*

$$\phi(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) = \int_{\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)\,.$$

Egyszerű tulajdonságok: $\phi(0) = 1$; $\phi(t)$ egyenletesen folytonos az egyenesen; $|\phi(t)| \leq 1$. A karakterisztikus függvényt azért szeretjük, mert független változók összegének karakterisztikus függvénye faktorizálódik, vagyis könnyen számolható a(z eloszlásfüggvény kiszámolása azonban macerás): ha X és Y függetlenek, akkor

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y)}) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Az alábbi tétel szerint különböző eloszlások karakterisztikus függvényei különbözőek:

Unicitási tétel. *Legyenek F és G eloszlásfüggvények, $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)$, $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}G(x)$. Ha $\phi(t) = \psi(t)$ minden t-re, akkor $F \equiv G$.*

Az F_n eloszlásfüggvények sorozata *gyengén konvergál* F eloszlásfüggvényhez, jelben $F_n \Rightarrow F$, ha $F_n(x) \to F(x)$ minden olyan x pontban, ami folytonossági pontja F-nek. Akkor mondjuk, hogy X_n *eloszlásban konvergál X-hez*, jelben $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, ha a megfelelő eloszlásfüggvényekre $F_n \Rightarrow F$. A következő tétel határeloszlások bizonyításánál alapvető fontosságú:

Folytonossági tétel. *Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots$ karakterisztikus függvényekkel. Ekkor $X_n \Rightarrow X$ akkor és csakis akkor, ha $\phi_n(t) \to \phi(t$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.*

6.1. Határozzuk meg az alábbi véletlen változók karakterisztikus függvényét!

(a) $X \sim \mathrm{E}(a, b)$;

(b) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$;

(c) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

(d) $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$;

(e) $X \sim \mathrm{Binom}(n, p)$.

Megoldás. (a) Az egyenletes eloszlás abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye $f(x) = (b-a)^{-1} I_[a, b](a)$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}\right]_{x=a}^{b} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{(b-a)\mathrm{i}t}.\end{aligned}$$

(b) A Poisson-eloszlás diszkrét, így

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}.\end{aligned}$$

(c) Az exponenciális eloszlás sűrűsége $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I_{\{x>0\}}(x)$, így

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}t-\lambda)}\mathrm{d}x = \lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{x(\mathrm{i}t-\lambda)}}{\mathrm{i}t-\lambda}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{i}t}.$$

(d) Ha $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, akkor $\mathbf{P}\{X=1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{X=0\}$, így

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 1 - p.$$

(e) Ha $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$, akkor $X = Y_1 + \ldots + Y_n$, ahol $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ független $\mathrm{Bernoulli}(p)$ eloszlású véletlen változók. Így a függetlenség és az előző pont szerint

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(Y_1+\ldots+Y_n)} = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY_k} = \left(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1-p\right)^n.$$

6.2. Határozzuk meg annak az X véletlen változónak a karakterisztikus függvényét, melyre $\mathbf{P}(0 < X < x) = x^2 5/12$, $0 < x \le 1$; $\mathbf{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbf{P}(X = 1) = 1/3$.

6.3. Határozzuk meg a következő $f(x)$ sűrűségfüggvényekhez tartozó karakterisztikus függvényeket!

(a) $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{ha} |x| \le 1, \\ 0, & \text{különben}; \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

6.4. Igazoljuk, hogy a standard normális karakterisztikus függvénye $\phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

6.5. Karakterisztikus függvények segítségével igazoljuk, hogy (tetszőleges paraméterek esetén!)

(a) független normálisok összege normális;

(b) független Poissonok összege Poisson.

Megoldás. (a) Ha Z standard normális, akkor $\mu+\sigma Z \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Ezért, ha $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, akkor standard normális karakterisztikus függvénye alapján

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu+\sigma Z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Ha $X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, és X és Y függetlenek, akkor a függetlenség miatt

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y)} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\cdot\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)},$$

ami éppen egy $\mathrm{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ eloszlás karakterisztikus függvénye. Mivel a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást, innen kapjuk, hogy az eloszlás $\mathrm{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, amit igazolni kellett. (Ezt a bizonyítást az tudja igazán értékelni, aki belátta az állítást a konvolúciós formula segítségével.)

(b) A λ paraméterű Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye $\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$. Ha $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ és függetlenek, akkor

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y)} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\cdot\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)},$$

ami éppen egy $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye. Az unicitási tétel alapján kapjuk, hogy $X+Y$ Poisson eloszlású $\lambda+\mu$ paraméterrel.

6.6. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független Egyenletes$(0,1)$ véletlen változók. Adjuk meg a maximumuk karakterisztikus függvényét!

6.7. Határozzuk meg a Cauchy–eloszlás karakterisztikus függvényét!

Segítség. Használjuk a reziduum-tételt; vagy inkább határozzuk meg a dupla exponenciális karakterisztikus függvényét (ennek a sűrűsége $f(x)=e^{-|x|}/2$, $x\in\mathbb{R}$).

6.8. Igazoljuk, hogy karakterisztikus függvény abszolút értékének négyzete is karakterisztikus függvény!

6.9. Igazoljuk, hogy X véletlen változó karakterisztikus függvénye pontosan akkor valós, ha X eloszlása szimmetrikus. (X eloszlása szimmetrikus, ha $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$.)

6.10. Igazoljuk, hogy X véletlen változó pontosan akkor rácsos eloszlású, ha karakterisztikus függvényének abszolút értéke valamely 0-tól különböző helyen 1.

Megjegyzés. Az X véletlen változó eloszlását rácsosnak nevezzük, ha léteznek $a \in \mathbb{R}$ és $h > 0$ számok, hogy X bármely lehetséges értéke előáll $a + kh$ alakban, $k \in \mathbb{Z}$.

Megoldás. Legyen $\varphi(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}$. A feltétel szerint $|\varphi(t_0)| = 1$ valamilyen $t_0 \neq 0$ számra. Ekkor létezik $b \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 b}$, másképpen

$$1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0 b}\varphi(t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0 b}\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 X} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0(x-b)}\mathrm{d}F(x).$$

Átrendezve, és valós részt véve

$$\int_{\mathbb{R}} [1 - \cos(t_0(x-b))]\, \mathrm{d}F(x) = 0.$$

Mivel $1 - \cos(t_0(x-b)) \geq 0$ az integrál csak akkor lehet 0, ha

$$1 - \cos(t_0(x-b)) = 0, \;\; \mu_F\text{-majdnem mindenütt.}$$

Az $1 - \cos(t_0(x-b))$ függvény a $2k\pi/t_0 + b$, $k \in \mathbb{Z}$, alakú pontokban 0, így

$$\mu_F\left(\left\{\frac{2k\pi}{t_0} + b \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) = 1.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $X \in \left\{\frac{2k\pi}{t_0} + b \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, ami az állítás.

6.11. Tegyük fel, hogy a φ karakterisztikus függvényre $|\varphi(t)| = |\varphi(t')| = 1$ és $t/t' \notin \mathbb{Q}$. Igazoljuk, hogy φ egy konstans véletlen változó karakterisztikus függvénye!

6.12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges φ karakterisztikus függvényre, minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $1 - \mathfrak{Re}\varphi(2t) \leq 4(1 - \mathfrak{Re}\varphi(t))$. ([8])

6.13. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású, véges szórású véletlen változók, melyekre az $X+Y$ és $X-Y$ véletlen változók függetlenek. Igazoljuk, hogy X és Y eloszlása normális. ([9])

Segítség. Feltehető, hogy a várható érték 0, a szórás pedig 1. Az általános eset skálázással megkapható. Jelölje $\varphi(t)$ a közös karakterisztikus függvényt. Mivel X és Y függetlenek

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y)} = \varphi(t)^2, \quad \mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X-Y)} = \varphi(t)\varphi(-t),$$

másrészt $X + Y$ és $X - Y$ is függetlenek, így

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X+Y+X-Y)} = \varphi(t)^3\varphi(-t),$$

másrészt a baloldal $= \varphi(2t)$. Így a

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$$

függvényegyenlethez jutunk. Logaritmust véve (persze ehhez be kell látni, hogy $\varphi(t)$ nem lehet 0)

$$\log\varphi(2t) = 3\log\varphi(t) + \log\varphi(-t),$$

majd ugyanezt $-t$-re felírva, és a két egyenletet összeadva

$$\log\varphi(2t) - \log\varphi(-2t) = 2\left(\log\varphi(t) - \log\varphi(-t)\right).$$

Ezt iterálva, beláthatjuk, hogy $\varphi(t) = \varphi(-t)$, amit a kiinduló függvényegyenletbe visszaírva

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^4.$$

Felhasználva, hogy $\varphi'(0) = 0$ és $\varphi''(0) = -1$, némi számolással belátható, hogy az egyenlet egyetlen megoldása az $\exp\{-t^2/2\}$ függvény.

6.14. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású, 0 várható értékű, véges szórású véletlen változók. Tegyük fel, hogy $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ eloszlása megegyezik X eloszlásával. Mutassuk meg, hogy X normális eloszlású. ([9])

6.15. Mutassuk meg, hogy a normális, a Poisson és a Cauchy–eloszlás korlátlanul osztható!

Megjegyzés. Az X véletlen változó *korlátlanul osztható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra megadható $Y_1, \ldots, Y_n$ független, azonos eloszlású véletlen változók, hogy

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Ezzel nyilván ekvivalens, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén X karakterisztikus függvénye előáll $\varphi(t) = \varphi_n^n(t)$ alakban, ahol φ_n karakterisztikus függvény.

6.16. Igazoljuk, hogy az az eloszlás, melynek sűrűsége $f(x) = |x|$ a $(-1, 1)$-en, nem korlátlanul osztható! ([5] 1.8., különben standard)

6.17. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nemnegatív független, azonos eloszlású véletlen változók. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ és $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Jelölje φ az X_1 véletlen változó karakterisztikus függvényét! Adjuk meg S_n/X_n^* karakterisztikus függvényét! *Darling, The role of the maximum term in the sum of independent random variables, Trans Amer. Math. Soc., 73 (1952), pp. 95–107.*

6.18. Legyen φ egy 0 várható értékű véletlen változó karakterisztikus függvénye. Tekintsük az

$$F = \left\{(x_1, x_2, \ldots) : x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq 1\right\}$$

halmazt, és ezen a $[0,1]^\infty$ szorzattopológia megszorítását. Bizonyítsuk be, hogy az

$$(x_k)_{k=1}^\infty \mapsto \prod_{k=1}^\infty \varphi(x_k)$$

függvény folytonos! Példával igazoljuk, hogy az $\mathbf{E}X = 0$ feltétel szükséges! *Breiman, L. (1965). On some limit theorems similar to the arc-sin law. Teor. Verojatnost. i Primenen.* ***10*** *351–360.*

6.19. Az X véletlen változó *momentumgeneráló függvénye* az $M(t) = \mathbf{E}e^{tX}$, amennyiben ez létezik.

Fejezzük ki a momentumokat a momentumgeneráló függvény deriváltjaival. Számítsuk ki a Bernoulli; binomiális; Poisson; geometriai; exponenciális; normális eloszlás momentumgeneráló függvényét!

6.20. Egy kis nagy eltérés tétel. Legyen X véletlen változó momentumgeneráló függvénye M. Mutassuk meg, hogy $c > 0$ esetén tetszőleges $\lambda > 0$ számra

$$\mathbf{P}\{X > c\} \le M(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda c}.$$

Legyenek most $X, X_1, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $m = \mathbf{E}X$, és $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a részletösszeg. Mutassuk meg, hogy $x > 0$ esetén

$$-\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left\{S_n/n > m + x\right\} \ge -\sup_{\lambda>0}\Big(\lambda x - \log \hat{M}(\lambda)\Big),$$

ahol $\hat{M}$ az $X - m$ momentumgeneráló függvénye. (Valójában egyenlőség teljesül.)

7. Véletlen változók konvergenciája

Sztochasztikus, majdnem biztos, L^p normában vett és eloszlásbeli konvergencia, ezek viszonya

Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Az X_n sorozat *sztochasztikusan konvergens és határértéke az X véletlen változó*, jelben $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, ha minden pozitív ε esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0\,.$$

Az X_n sorozat *majdnem biztosan, vagy 1 valószínűséggel konvergál és határértéke* X, ha az $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ halmaz mértéke 1, azaz $\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$.

A majdnem biztos konvergencia erősebb, mint a sztochasztikus, azaz ha $X_n \to X$ m.b., akkor $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. A megfordítás nem teljesül.

Az X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók sorozata r-edik momentumban konvergál az X véletlen változóhoz ($X_n \xrightarrow{L^r} X$), ha $\mathbf{E}|X_n|^r < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{E}|X|^r < \infty$, és

$$\mathbf{E}|X_n - X|^r \to 0.$$

Az r-edik momentumban vett konvergenciából következik a sztochasztikus. A m.b. konvergencia és a momentumkonvergencia viszont nem összehasonlíthatóak, azaz egyikből sem következik a másik.

Véletlen változók átlagaira vonatkozó konvergenciatételeket *nagy számok törvényének* nevezzük. Sztochasztikus konvergencia esetén gyenge, m.b. konvergencia esetén erős törvényről beszélünk.

Etemadi tétele (1981). *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ páronként korrelálatlan véletlen változók, véges várható értékkel. Ekkor*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \to \mathbf{E}(X) \quad m.b.$$

7.1. Mutassuk meg, hogy a majdnem biztos konvergencia erősebb, mint a sztochasztikus. Példával igazoljuk, hogy a megfordítás nem igaz.

7.2. Mutassuk meg, hogy az $Y_n \to 0$ majdnem biztosan, és a $\sup_{m \geq n} |Y_m| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ feltételek ekvivalensek!

7.3. Mutassuk meg, hogy az r-edik, $r > 0$, momentumban való konvergencia erősebb, mint a sztochasztikus! Példával igazoljuk, hogy a megfordítás nem igaz!

7.4. Vizsgáljuk meg az r-edik momentumban való és a majdnem biztos konvergencia viszonyát!

7.5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \mathbf{P}\{X_n = 1\}, \ n \in \mathbb{N},$$

eloszlással. Mutassuk meg, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, de $X_n \not\to 0$ majdnem biztosan!

Hogy kell módosítani a változókat, hogy a momentumkonvergencia se teljesüljön?

Megoldás. Tetszőleges $\varepsilon \in (0,1)$ esetén $\mathbf{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1/n$, ami tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. Tehát X_n sztochasztikusan konvergál 0-hoz.

Ugyanakkor, $\{X_n = 1\}$ események függetlenek, és $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X_n = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \infty$, ezért a második Borel–Cantelli-lemma szerint az $\{X_n = 1\}$ események közül egy valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik, vagyis $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ m.b., így a majdnem biztos 0-hoz való konvergencia nem teljesül.

Legyen $\mathbf{P}\{X_n = n\} = n^{-1}$. Ekkor $\mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}X_n \equiv 1 \not\to 0$, tehát X_n nem konvergál első momentumban 0-hoz.

7.6. Tegyük fel, hogy az $\{X_n\}$ véletlen változók sorozatára $\mathbf{E}(|X_n|) < C$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha_n \to 0$ esetén $\alpha_n X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Megoldás. A Markov-egyenlőtlenség és a feltétel szerint tetszőleges $x > 0$ esetén $\mathbf{P}\{|X_n| > x\} \le \mathbf{E}|X_n|/x \le C/x$. Ezért, ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor

$$\mathbf{P}\{|\alpha_n X_n| > \varepsilon\} \le \frac{C\alpha_n}{\varepsilon} \to 0,$$

ami éppen a sztochasztikus konvergenciát jelenti.

7.7. Tegyük fel, hogy az $\{X_n\}$ nemnegatív véletlen változók sorozatára $\mathbf{D}(X_n)/\mathbf{E}(X_n) \to 0$. Mutassuk meg, hogy $X_n/\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$. ([3] 3.2.8.)

Megoldás. Ennél a feladatnál a Csebisev-egyenlőtlenséget használjuk. Azt kell igazolni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_n}{\mathbf{E}X_n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

ha $n \to \infty$. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\mathbf{P}\{|X_n - \mathbf{E}X_n| > x\} \le D^2(X_n)/x^2$, így

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_n}{\mathbf{E}X_n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\left\{|X_n - \mathbf{E}X_n| > \varepsilon \mathbf{E}X_n\right\} \le \frac{D^2(X_n)}{\varepsilon^2(\mathbf{E}X_n)^2} \to 0,$$

ha $n \to \infty$, a feltétel szerint.

7.8. Legyenek az X_n véletlen változók korlátosak, $|X_n| < C$. Ekkor $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{E}(|X_n|) \to 0$.

7.9. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók F eloszlásfüggvénnyel, és jelölje $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$ az első n változó maximumát. Ebben a feladatban kivesézzük, hogy az M_n/n változó milyen feltételek mellett milyen értelemben konvergál.

(L^1) Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{E}X < \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\frac{\max_{1\le k\le n} X_k}{n} = 0;$$

azaz $\max_{1\le k\le n} X_k/n \xrightarrow{L^1} 0$.

(**P**) Tudjuk, hogy az L^1 konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. Ezért az előző pont alapján

$$\frac{\max_{1\le k\le n} X_k}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \tag{P}$$

Ez a feltétel elegendő, de nem szükséges. Mutassuk meg, hogy (P) pontosan akkor teljesül, ha $\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] = 0$. (Korábbi feladatban láttuk, hogy a várható érték végességéből következik az $x[1-F(x)] \to 0$ konvergencia, fordítva persze nem igaz.)

Ezek szerint ha a közös eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x\log x}, & x \ge \mathrm{e} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor $M_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, de persze L^1 normában nem, hiszen nem is létezik a várható érték.

(m.b.) A majdnem biztos konvergencia erősebb a sztochasztikusnál, és nem összehasonlítható az L^1 konvergenciával. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{M_n}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0,$$

akkor és csakis akkor teljesül, ha $\mathbf{E}X < \infty$.

Segítség. Itt azt az egyszerű de frappáns dolgot kell észrevenni, hogy $\{M_n/n > \varepsilon\}$ esemény pontosan akkor következik be végtelen sokszor, ha $\{X_n/n > \varepsilon\}$ bekövetkezik végtelen sokszor. Azt kell még használni, hogy

$$\sum_n \mathbf{P}\{X > n\varepsilon\} < \infty \;\Leftrightarrow\; \mathbf{E}X < \infty.$$

(Lásd 5.21. feladatot.) A két Borel–Cantelli-lemmát alkalmazva kapjuk az ekvivalenciát.

($\mathcal{D}$) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{M_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y,$$

valamilyen Y nemdegenerált véletlen változóra, pontosan akkor, ha minden $x > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} n[1 - F(nx)] = c/x$, ahol $c > 0$. Határozzuk meg Y lehetséges eloszlásfüggvényeit!

Segítség. Az eloszlásbeli konvergencia definíciójából és némi analízissel gyorsan kapjuk, hogy a $\lim_{n\to\infty} n[1-F(nx)]$ határérték létezik minden $x > 0$ esetén. Ezek után a limeszfüggvényt is meghatározhatjuk olyan okoskodással, amivel a Cauchy-féle függvényegyenletet megoldottuk.

7.10. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyre $\mathbf{E}(X) = 0$, $\mathbf{E}(X^2) = 1$, és legyen $x_n < 0$, $x_n = O(n^{-1/2+\varepsilon})$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \le x_n\right) = 0.$$

7.11. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független $(0,1)$-en egyenletes eloszlású véletlen változók, jelölje $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ a minimumukat. Mutassuk meg, hogy

(a) $m_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$;

(b) $\mathbf{P}\{nm_n > x\} \to \mathrm{e}^{-x}$;

(c) $m_n \to 0$ m.b.

7.12. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók és

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{1 + |X_n + X_{n+1}|}, \quad S_n = Y_1 + \cdots Y_n\,.$$

Igazoljuk, hogy valamilyen c valós számra $S_n/n \to c$ m.b.! ([5] 4.2.)

7.13. Legyen az $X, X_1, X_2, \dots$ véletlen változók eloszlásfüggvényei rendre $F, F_1, F_2, \dots$. Mutassuk meg, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ esetén $F_n \Rightarrow F$, azaz $F_n(x) \to F(x)$, az F minden folytonossági pontjában. Ez éppen azt jelenti, hogy a sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásbeli konvergencia.

Megoldás. Legyen $x \in C_F$, az F eloszlásfüggvény egy tetszőleges folytonossági pontja. Az eloszlásfüggvény definíciója és a mérték monotonitása miatt $\delta > 0$ esetén minden n természetes számra

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}\{X_n \le x\} \\ &= \mathbf{P}\{X_n \le x, |X - X_n| \le \delta\} + \mathbf{P}\{X_n \le x, |X - X_n| > \delta\} \\ &\le \mathbf{P}\{X \le x + \delta\} + \mathbf{P}\{|X_n - X| > \delta\}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon az első tag éppen $F(x+\delta)$, ami tetszőlegesen közel van $F(x)$-hez, ha δ elég kicsi, hiszen x folytonossági pontja F-nek. A másik tag viszont éppen a sztochasztikus konvergencia definíciója miatt tart 0-hoz, tetszőleges rögzített δ esetén. Legyen tehát $\varepsilon > 0$ rögzített, és $\delta = \delta(\varepsilon)$ olyan kicsi, hogy $F(x) - \varepsilon/2 \le F(x - \delta) \le F(x + \delta) \le F(x) + \varepsilon/2$. Ilyen van, hisz $x \in C_F$. Legyen $n_0 = n_0(\varepsilon)$ olyan nagy, hogy $n \ge n_0$ esetén $\mathbf{P}\{|X_n - X| > \delta\} \le \varepsilon/2$. Ilyen küszöbindex pedig a sztochasztikus konvergencia miatt létezik. Ekkor a kiemelt egyenlőtlenség szerint, $n \ge n_0$ esetén $F_n(x) \le F(x) + \varepsilon$. Az alsó becslés ugyanígy megy. Azt láttuk be, hogy tetszőleges $x \in C_F$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index, hogy $n \ge n_0$ esetén $|F_n(x) - F(x)| \le \varepsilon$. Ez éppen az eloszlásbeli konvergencia definíciója.

7.14. Tegyük fel, hogy X_n véletlen változók sorozatára $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathcal{E}$, ahol $\mathcal{E}$ az az elfajult véletlen változó, ami 1 valószínűséggel 0. Igazoljuk, hogy ekkor $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} 0$, azaz ebben a speciális esetben az eloszlásbeli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

7.15. Bizonyítsuk be, hogy ha $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, akkor $H_n(x, y) \to H(x, y)$ a H függvény minden (x, y) folytonossági pontjában!

7.16. Mutassuk meg, hogy ha X_n és Y_n függetlenek, és $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, akkor X és Y is függetlenek!

7.17. Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók sztochasztikusan konvergálnak egy X véletlen változóhoz. Igazoljuk, hogy X majdnem biztosan konstans! ([5] 1.2.)

7.18. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \, .$$

7.19. Legyen $f \in C[0, 1]$. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \, ,$$

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \, .$$

7.20. Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left|\frac{s}{n}-u\right| \mathrm{e}^{-s}\frac{s^{\lfloor nu\rfloor-1}}{\lfloor nu\rfloor!}\mathrm{d}s \left(=\lim \mathbf{E}\left|\frac{S_{\lfloor nu\rfloor}}{n}-u\right|\right).$$

7.21. Adjuk meg a következő sor aszimptotikáját!

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\log(k+n)$$

7.22. Tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Következik-e ebből, hogy $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$? És ha még azt is feltesszük, hogy $|X_n|\le 1$? Mi a helyzet a m.b. konvergencia esetén? ([5] 2.8.)

7.23. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, közös F eloszlásfüggvénnyel, és tegyük fel, hogy $F(x) < 1$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Igazoljuk a következőt! Ahhoz, hogy megfelelő A_n állandókkal tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|\max\{X_1,\ldots,X_n\}-A_n|<\varepsilon)=1$$

teljesüljön, szükséges és elegendő, hogy tetszőleges $c > 0$ számra

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-F(x+c)}{1-F(x)}=0.$$

([3] 3.2.4.)

7.24. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ és $Y_1, Y_2, \ldots$ véletlen változók, melyekre X_n és Y_n függetlenek minden n-re, és $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan valós a_n számsorozat, hogy $X_n-a_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$! ([5] 3.8.)

7.25. Igazoljuk a Kolmogorov-egyenlőtlenség következő, Hájek–Rényi típusú általánosítását: Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független 0 várható értékű véletlen változók, $\mathbf{E}(X_k^2)=d_k^2$, és c_k pozitív számok nemcsökkenő sorozata. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\max_{n\le k\le m} c_k|S_k|\ge\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\left(c_n^2\sum_{k=1}^{n}d_k^2+\sum_{k=n+1}^{m}c_k^2d_k^2\right).$$

A Hájek–Rényi-egyenlőtlenség segítségével igazoljuk a Kolmogorov-féle nagyszámtörvényt! *Hájek, Rényi : ...*

Segítség. Nézegessük az

$$Y = \sum_{k=n}^{m-1} S_k^2(c_k^2 - c_{k+1}^2) + c_m^2 S_m^2$$

változót és használjuk a Kolmogorov-egyenlőtlenség bizonyításának ötletét!

7.26. Szluckij–lemma. Igazoljuk, hogy ha a V_n véletlen változók sorozatára $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} V$ és az u_n, v_n valós sorozatokra $u_n \to 1$, $v_n \to 0$, akkor $u_n V_n + v_n \xrightarrow{\mathcal{D}} V$.

7.27. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Bernoulli(p) eloszlású véletlen változók. Karakterisztikus függvények módszerével igazoljuk, hogy

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

ahol $Z \sim$N(0,1), és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

7.28. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$ független Egyenletes$(0,1)$ eloszlású véletlen változók. Jelölje Y_n a rendezett minta középső elemét. Igazoljuk, hogy

$$Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{2}.$$

Mutassuk meg, hogy ha $\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1} < \infty$, akkor

$$Y_{n_k} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ m.b. amint } k \to \infty.$$

Segítség. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\{Y_n > 1/2 + \varepsilon\} &= \{\text{legalább } n+1 \text{ pont esik az } [1/2+\varepsilon, 1] \text{ intervallumba}\} \\ &= \{S_{2n+1} \geq n+1\},\end{aligned}$$

ahol $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} I_i$, binomiális eloszlású $(2n+1, 1/2-\varepsilon)$ paraméterekkel.

7.29. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, közös

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 1, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

eloszlásfüggvénnyel. Jelölje $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ az n független véletlen változó maximumát. Igazoljuk, hogy

$$H_n(x) = \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{n} \leq x\right) \Rightarrow H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-1/x}, & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát M_n/n eloszlásban konvergál. Mutassuk meg, hogy pontonként nem, azaz

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \infty \quad \text{m.b.}$$

7.30. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók. Jelölje $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Igazoljuk, hogy

$$H_n(x) = \mathbf{P}(M_n - \log n \le x) \Rightarrow H(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

7.31. n sofőr közösen használ egy autót úgy, hogy minden nap sorsolással döntik el, hogy ki vezessen aznap. Jelölje $\mu(n)$ azt a legkisebb természetes számot, amely azt jelenti, hogy a sofőrök közül ennyi nap alatt mindenki vezette az autót legalább egyszer. Határozzuk meg

$$\frac{\mu(n) - n\log n}{n}$$

határeloszlását! ([3])

7.32. Legyenek $U_1, U_2, \ldots$ független, a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású véletlen változók. Rögzített $\delta > 0$ esetén legyen

$$N = N_\delta = \min\{k : U_k < \delta\}.$$

Határozzuk meg NU_N határeloszlását, amint $\delta \to 0$!

Hasonlítsuk össze a példát a 7.11. Feladat (b) részével! Miért más a határeloszlás?

Megoldás. Világos, hogy N_δ geometriai eloszlású δ paraméterrel, azaz $\mathbf{P}(N = k) = (1-\delta)^{k-1}\delta$. Továbbá, U_N egyenletes eloszlású a $(0,\delta)$ intervallumon, és független N-től. Legyen $x > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\mathbf{P}(NU_N \le x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(U_N \le x/k)\mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(U_N \le x/k)(1-\delta)^{k-1}\delta.$$

Mivel $\mathbf{P}(U_N \le x) = 1$ ha $x > \delta$, és x/δ ha $x \le \delta$, így

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(NU_n \le x) &= \sum_{k=1}^{[x/\delta]} (1-\delta)^{k-1}\delta + \sum_{k=[x/\delta]+1}^{\infty} \frac{x}{\delta k}(1-\delta)^{k-1}\delta \\
&= \delta\frac{1-(1-\delta)^{x/[\delta]}}{1-(1-\delta)} + (1-\delta)^{[x/\delta]} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{\delta j + \delta[x/\delta]}(1-\delta)^{j-1}\delta \\
&= 1 - (1-\delta)^{[x/\delta]} + \frac{(1-\delta)^{[x/\delta]}}{1-\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \delta \frac{x}{\delta j + \delta[x/\delta]}(1-\delta)^{\delta j/\delta}.
\end{aligned}$$

Az összeg első tagja $1 - e^{-x}$-hez konvergál, ha $\delta \to 0$. A második tagban a végtelen összeg pedig az $\int_0^\infty \frac{x}{x+y} e^{-y} dy$ integrálhoz tartozó integrálközelítő összeg. Összegezve,

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbf{P}(NU_N) = 1 - e^{-x} + e^{-x} \int_0^\infty \frac{x}{x+y} e^{-y} dy$$
$$= 1 - e^{-x} \int_0^\infty \frac{y}{x+y} e^{-y} dy.$$

7.33. Rényi tétele. Legyen $N_p \sim \text{Geom}(p)$ véletlen változó, és tőle függetlenül legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $\mathbf{E}X = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$p\left(X_1 + \cdots + X_{N_p}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1).$$

Bening, Korolev: Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance, 114.o., Thm 3.6.6, Robbins, The asymptotic distribution of the sums of random number of random variables

7.34. Legyen N egyenletes eloszlású az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon, azaz $\mathbf{P}\{N = k\} = n^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tekintsük az

$$X_n = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n+1-j}$$

véletlen tagszámú összeget. Igazoljuk az

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1)$$

eloszlásbeli konvergenciát!

7.35. Az F és G eloszlásfüggvények Lévy–távolsága

$$L(F, G) = \inf\{h > 0 : F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h\}.$$

Mutassuk meg, hogy $L(\cdot, \cdot)$ valóban metrika az egydimenziós eloszlásfüggvények terén!

7.36. Mutassuk meg, hogy az alábbiak ekvivalensek:

(a) $F_n \Rightarrow F$;

(b) $F_n(x) \to F(x)$, a valós számok valamely sűrű részhalmazán;

(c) $L(F_n, F) \to 0$;

(d) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}F_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}F(x)$, minden korlátos és folytonos f függvény esetén.

7.37. Legyen μ pozitív mérték X halmazon. Az $\{f_n\}$ mérhető függvények sorozata *mértékben konvergál* az f függvényhez, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, ha

$$\mu\left(\{x : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \to 0, \text{ amint } n \to \infty.$$

Tegyük fel, hogy $\mu(X) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

(a) Ha $f_n \to f$ mm., akkor $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(b) Ha $f_n \in L^p(\mu)$ és $\|f_n - f\|_p \to 0$, akkor $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(c) Ha $f_n \xrightarrow{\mu} f$, akkor létezik olyan n_k részsorozat, hogy $f_{n_k} \to f$ mm.

Vizsgáljuk az (a) és (b) állítások megfordítását! Mi a helyzet, ha $\mu(X) = \infty$? ([10])

7.38. Tegyük fel, hogy f_n és f sűrűségfüggvények és az $f_n(x) \to f(x)$ konvergencia majdnem mindenütt teljesül. Mutassuk meg, hogy ha F_n és F a megfelelő eloszlásfüggvények, akkor $F_n \Rightarrow F$.

7.39. Adjunk példát olyan abszolút folytonos F_n eloszlásfüggvényekre, hogy $F_n \Rightarrow F$, valamely abszolút folytonos F eloszlásfüggvényre, de $f_n(x) \to f(x)$ egyetlen olyan pontban sem teljesül, amelyre $f(x) > 0$.

7.40. Legyen F_n eloszlásfüggvények egy sorozata, melyekre minden racionális λ számra

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\, \mathrm{d}F_n(x) \to 1\,.$$

Következik-e, hogy $F_n \Rightarrow \delta_0$, ahol $\delta_0(x) = I(x \geq 0)$ a Dirac-delta? ([5] 1.5)

8. Feltételes várható érték

σ-algebrára vett feltételes várható érték tulajdonságai

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebrája $\mathcal{A}$-nak, X pedig integrálható véletlen változó. Ekkor *az X változó $\mathcal{G}$-re vonatkozó feltételes várható értéke, jelben* $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, az az (majdnem biztosan) egyértelműen meghatározott véletlen változó, mely

- $\mathcal{G}$-mérhető, azaz minden $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmazra $E(X|\mathcal{G})^{-1}(B) \in \mathcal{G}$;
- minden $G \in \mathcal{G}$ halmazra

$$\int_G X \,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_G \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \,\mathrm{d}\mathbf{P}\,.$$

Az $A \in \mathcal{A}$ esemény $\mathcal{G}$-re vonatkozó *feltételes valószínűsége* $\mathbf{P}\{A|\mathcal{G}\} = \mathbf{E}(I_A|\mathcal{G})$, ahol I_A az A esemény indikátora. Feltételes valószínűség esetén a második feltétel a következő alakba írható: minden $G \in \mathcal{G}$ halmazra

$$\mathbf{P}\{A \cap G\} = \int_G \mathbf{P}\{A|\mathcal{G}\} \,\mathrm{d}\mathbf{P}\,.$$

Intuitív jelentés. Az $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ feltételes várható értékre úgy gondolunk, hogy a kísérlet kimeneteléről van egy részinformációnk. Azt nem tudjuk, hogy pontosan melyik ω kimenetel következett be, de azt minden $\mathcal{G}$-beli halmazra el tudjuk dönteni, hogy ennek ω eleme vagy se. Emellett a plusz információ mellett vizsgáljuk X várható értékét. Ha pl. a valószínűségi mező $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, $X(x) = x$ a véletlen változó és $\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1/2), [1/2,1], [0,1]\}$, akkor az $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ értékére úgy gondolunk, hogy azt tudjuk, hogy ω kisebb-e mint $1/2$ vagy sem. Tehát $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})(1/4)$ esetén annyit tudunk, hogy olyan ω következett be, ami kisebb $1/2$-nél. Emellett a plusz feltétel mellett X várható értéke, a $(0,1/2)$ vett integrálja. Persze az egész csak szemléletes jelentés, ami néha félrevezető, amint azt néhány példa mutatja.

Legyen Y is véletlen változó, ekkor az X *változó Y-ra vonatkozó feltételes várható értéke* $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}(X|\sigma(Y))$, ahol $\sigma(Y)$ az Y által generált σ-algebra, azaz $\sigma(Y) = \sigma(Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}) = Y^{-1}(\mathcal{B})$. Mivel $\mathbf{E}(X|Y)$ $\sigma(Y)$-mérhető, ezért van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós mérhető függvény, hogy $\mathbf{E}(X|Y) = g(Y)$. Most már tudjuk definiálni az X feltételes várható értékét az $Y = y$ adott értéke mellett: $\mathbf{E}(X|Y = y) = g(y)$. (Ennek a hagyományos régi értelemben nincs értelme, hiszen $Y = y$ általában 0 valószínűségű esemény.) Innen egyszerűen levezethető a teljes várható érték tétel:

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y)) = \mathbf{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \,\mathrm{d}F(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(X|Y = y) \,\mathrm{d}F(y)\,,$$

ha Y folytonos, akkor

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(X|Y = y) f(y) \,\mathrm{d}y\,.$$

Speciális esetben kapjuk a teljes valószínűség tételét, amit diszkrét esetben már ismerünk:

$$\mathbf{P}\{A\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\{A|Y = y\} \mathrm{d}F(y)\,,$$

és ha Y folytonos

$$\mathbf{P}\{A\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\{A|Y = y\} f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Az $\mathbf{E}(X|Y = y)$ szemléletes jelentése: az X várható értéke feltéve, hogy $Y = y$.

Legyenek $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ és $\mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^l$ (nem feltétlen azonos dimenziós) véletlen vektorok az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, melyek együttes sűrűsége $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ekkor az $\mathbf{X}$ *vektorváltozó* $\mathbf{Y}$*-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye*

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{h(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\mathbf{y})},$$

ahol $g(\mathbf{y})$ az $\mathbf{Y}$ marginális sűrűsége. Az elnevezést a következő tulajdonság indokolja: minden $H \in \mathcal{B}^k$ k-dimenziós Borel-halmazra

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X} \in H|\mathbf{Y}\}(\omega) = \int_H f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{Y}(\omega))\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

8.1. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását! ([3])

8.2. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\mathrm{km}^2$. ([3])

8.3. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, ahol λ a Lebesgue-mérték. Tekintsük az $\mathcal{F} = \{\emptyset, [0,1/2), [1/2,1], [0,1]\}$ σ-algebrát! Milyen változók lesznek $\mathcal{F}$-mérhetők? Határozzuk meg az $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket!

Megoldás. Legyen X $\mathcal{F}$-mérhető véletlen változó. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $X^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$. Ezért ha $X(\omega) = a$ valamely $\omega \in [0,1/2)$ esetén, akkor $X^{-1}(\{a\}) = [0,1/2)$ vagy $[0,1]$ (hiszen csak ez a két $\mathcal{F}$-beli halmaz olyan, hogy tartalmaz $[0,1/2)$-beli pontot). Ez pedig azt jelenti, hogy X

konstans a a $[0,1/2)$ intervallumon. Hasonlóan látható, hogy X konstans kell legyen az $[1/2,1]$ intervallumon. Tehát az $\mathcal{F}$-mérhető véletlen változók $aI_{[0,1/2)}(\omega)+bI_{[1/2,1]}(\omega)$ alakúak, ahol $a,b\in\mathbb{R}$.

Az $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ egy $\mathcal{F}$-mérhető véletlen változó, így $aI_{[0,1/2)}(\omega)+bI_{[1/2,1]}(\omega)$ alakú. A feltételes várható érték definíciójában szereplő másik feltétel szerint

$$\int_F X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_F \mathbf{E}(X|\mathcal{F})\mathrm{d}\mathbf{P},$$

minden $F\in\mathcal{F}$ halmazra. Ezt nyilván elég leellenőrizni a $[0,/1/2)$ és $[1/2,1]$ halmazokon. Tehát

$$\int_{[0,1/2)} X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_{[0,1/2)}\left(aI_{[0,1/2)}(\omega)+bI_{[1/2,1]}(\omega)\right)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)=\frac{a}{2},$$
$$\int_{[1/2,1]} X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_{[1/2,1]}\left(aI_{[0,1/2)}(\omega)+bI_{[1/2,1]}(\omega)\right)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)=\frac{b}{2}.$$

Ez a két egyenlet pedig meghatározza a és b értékét, azaz

$$a=2\int_{[0,1/2)} X\mathrm{d}\mathbf{P},\quad b=2\int_{[1/2,1]} X\mathrm{d}\mathbf{P}.$$

8.4. Milyen σ-algebrát generál az a változó, ami konstans? Általában a diszkrét változók milyen típusú σ-algebrát generálnak?

Megoldás. Ha $Y(\omega)\equiv a$ valamilyen a valósra, akkor minden B Borel-halmaz esetén $Y^{-1}(B)=\emptyset$ vagy Ω, attól függően, hogy $a\in B$ vagy $a\notin B$. Tehát $\sigma(Y)=\{\emptyset,\Omega\}$ a triviális σ-algebra.

Legyen most Y diszkrét véletlen változó $\{y_1,y_2,\ldots\}$ (véges, vagy megszámlálhatóan végtelen) lehetséges értékekkel, és legyen $A_i=Y^{-1}(\{y_i\})$. Ekkor $\cup_i A_i=\Omega$, és $A_i\in\sigma(Y)$, tehát

$$\sigma\left(A_1,A_2,\ldots\right)\subset\sigma(Y).$$

Másrészt viszont ha B tetszőleges Borel-halmaz, akkor jelölje $j_1,j_2,\ldots$ azokat az indexeket, melyekre $y_{j_i}\in B$. Így

$$Y^{-1}(B)=Y^{-1}\left(\{y_{j_1},y_{j_2},\ldots\}\right)=\cup_i Y^{-1}(\{y_{j_i}\})=\cup_i A_{j_i},$$

azaz $\sigma(Y)\subset\sigma\left(A_1,A_2,\ldots\right)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\sigma(Y)=\sigma\left(A_1,A_2,\ldots\right).$$

Azaz diszkrét véletlen változó által generált σ-algebra mindig az Ω egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen partíciója által generált σ-algebra.

8.5. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = ([-1,1], \mathcal{B}_{[-1,1]}, \lambda/2)$, ahol λ a Lebesgue-mérték. Tekintsük az $X(x) = x^2$ véletlen változót. Milyen σ-algebrát generál X? Adjuk meg a $\mathbf{P}(A|X)$ és $\mathbf{E}(Y|X)$ feltételes valószínűséget és várható értéket, ahol A egy esemény, Y pedig integrálható változó! Oldjuk meg a feladatot $X_2(x) = |x|$ és $X_3(x) = x^6$ változókkal is! (Van különbség?) ([4])

Megoldás. Az x^2 páros függvény, ami azt jelenti, hogy nem különbözteti meg az x és $-x$ pontokat. Innen meg lehet sejteni az eredményt: a $\sigma(X)$ olyan A halmazokból áll, melyek előállnak $B \cup (-B)$ alakban, ahol B tetszőleges $[0,1]$-beli Borel-halmaz, $-B = \{-x : x \in B\}$. Formálisan

$$\sigma(X) = \{B \cup (-B) \,:\, B \in \mathcal{B}([0,1])\}.$$

Valóban, egyrészt ha C tetszőleges Borel-halmaz $\mathbb{R}$-en, akkor

$$X^{-1}(C) = X^{-1}(C \cap [0,1]) = \sqrt{(C \cap [0,1])} \cup \left(-\sqrt{(C \cap [0,1])}\right),$$

és $\sqrt{(C \cap [0,1])} \in \mathcal{B}([0,1])$, hiszen az $X(x) = x^2$ függvény mérhető ($\sqrt{A} = \{\sqrt{a} : a \in A\}$). Másrészt tetszőleges $B \in \mathcal{B}([0,1])$ esetén $X^{-1}(B^2) = B \cup (-B)$, ezzel az egyenlőséget beláttuk.

Most meghatározzuk az erre a σ-algebrára vett feltételes várható értékeket. Definíció szerint

$$\mathbf{P}(A|X) = \mathbf{E}[I_A|X] = \mathbf{E}[I_A|\sigma(X)].$$

A $\sigma(X)$ információ nekem annyit mond, hogy minden $x \in [-1,1]$ esetén el tudom dönteni, hogy $\{x, -x\}$ bekövetkezett-e, vagy se. Ezek alapján, ha x olyan, hogy $x \notin A$ és $-x \notin A$, akkor biztos lehetek benne, hogy A nem következett be, tehát az ilyen x-ekre $\mathbf{P}(A|X)(x) = 0$. Ha x olyan, hogy $x \in A$ és $-x \in A$ is teljesül, akkor biztos, hogy A bekövetkezett, azaz $\mathbf{P}(A|X)(x) = 1$. Végül, ha $x \in A$ de $-x \notin A$, vagy fordítva, akkor azt tudom, hogy $\{-x, x\}$ kimenetel egyike következett be, ezek közül az egyik esetben A bekövetkezett, a másik esetben nem, így $\mathbf{P}(A|X)(x) = 1/2$. Formálisan

$$\mathbf{P}(A|X)(x) = \frac{I_A(x) + I_{-A}(x)}{2}.$$

Könnyű látni, hogy a jobb oldalon szereplő változó $\sigma(X)$ mérhető, hiszen a $0, 1/2, 1$ értéket veheti fel, és a megfelelő halmazok szimmetrikusak az origóra. Legyen $B \in \sigma(X)$. Azt kell megmutatni, hogy

$$\int_B I_A(x)\mathrm{d}\mathbf{P}(x) = \int_B \frac{I_A(x) + I_{-A}(x)}{2}\mathrm{d}\mathbf{P}(x).$$

A bal oldal $= \mathbf{P}(A \cap B)$, a jobb oldal pedig $= (\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(-A \cap B))/2$, ami a B halmaz szimmetriája miatt $= \mathbf{P}(A \cap B)$.

Az előző esethez hasonlóan

$$\mathbf{E}\left[Y|X\right] = \frac{Y + \tilde{Y}}{2},$$

ahol $\tilde{Y}(\omega) = Y(-\omega)$. A mérhetőség és a megfelelő integrálok egyenlősége ugyanúgy igazolható, mint az $Y = I_A$ esetben.

Az X_2, X_3 véletlen változók esetén nincs különbség, hiszen $\sigma(X) = \sigma(X_2) = \sigma(X_3)$.

8.6. Legyenek X, Y független azonos eloszlású véletlen változók. Milyen σ-algebrát generál az $X+Y$ változó? Határozzuk meg az $\mathbf{E}[X|X+Y]$ feltételes várható értéket! (Először sejtsük meg mi kell legyen az eredmény, aztán ellenőrizzük a két szükséges feltételt!)

Megoldás. Ha tudjuk az összeg értékét, akkor természetes azt várni, hogy az egyik összeadandó várható értéke az összeg fele lesz, hiszen azonos eloszlásúak és függetlenek a változók. Azaz

$$\mathbf{E}[X|X+Y] = \frac{X+Y}{2}.$$

Ez $\sigma(X+Y)$-mérhető, hiszen függvénye $(X+Y)$-nak. Azt kell még megmutatni, hogy minden $F \in \sigma(X+Y)$ halmazra

$$\int_F X \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_F \frac{X+Y}{2} \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Feltehető, hogy $F = \{X+Y \leq z\}$, hiszen elég generátorrendszeren ellenőrizni az egyenlőséget. Azt kell tehát látni, hogy

$$\int_{\{X+Y \leq z\}} X \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\{X+Y \leq z\}} Y \mathrm{d}\mathbf{P}. \tag{F}$$

Felhasználva, hogy X és Y függetlenek és azonos eloszlásúak, az integráltranszformációs tétel szerint

$$\int_{\{X+Y \leq z\}} X \mathrm{d}\mathbf{P} = \iint_{S_z} x \,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} xF(z-x)\mathrm{d}F(x),$$

ahol $S_z = \{(x,y) \,:\, x+y \leq z\}$. Látjuk, hogy (F) jobb oldala ugyanezzel egyenlő, így készen vagyunk.

8.7. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véletlen változók, közös F eloszlásfüggvénnyel, ami folytonos és pozitív. Legyen $M = \max\{X, Y\}$.

Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X \leq x|M)$ feltételes eloszlásfüggvényt! (Intuitív eredmény, majd precíz bizonyítás.) ([2], 33.8)

Megoldás. Tudjuk, hogy mi a két változó maximuma, azaz $M = m$. Ekkor, ha $x \geq m$, akkor $\mathbf{P}(X \leq x|M = m) = 1$, hiszen $X \leq M = m$. Az $x < m$ esetén vagy X vagy Y a maximum, nyilván $1/2 - 1/2$ valószínűséggel. Ha $X = M$, akkor az $\{X \leq x\}$ esemény nem következett be, ha pedig $Y = M$, akkor annyit tudunk, hogy $X \leq m$, így $\mathbf{P}(X \leq x|X \leq m) = F(x)/F(m)$. Összegezve,

$$\mathbf{P}(X \leq x|M)(\omega) = I_{\{x \geq M(\omega)\}}(\omega) + I_{\{x<M\}}(\omega)\frac{1}{2}\frac{F(x)}{F(M(\omega))}.$$

Ezt mondja az intuíció. Most belátjuk, hogy valóban ez a feltételes valószínűség.

Az világos, hogy a jobb oldal $\sigma(M)$-mérhető, hiszen M-nek függvénye. Azt kell tehát megmutatni, hogy minden $A \in \sigma(M)$ eseményre

$$\mathbf{P}\left\{A \cap \{X \leq x\}\right\} = \int_A \left(I_{\{x \geq M(\omega)\}}(\omega) + I_{\{x<M\}}(\omega)\frac{1}{2}\frac{F(x)}{F(M(\omega))} \right) \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Az egyenlőséget elég a $\sigma(M)$ egy generátorrendszerén ellenőrizni, tehát elég az $A = \{M \leq m\}$ alakú eseményekre igazolni. Egyrészt

$$\int_{\{M \leq m\}} I_{\{x \geq M(\omega)\}}(\omega)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}\{M \leq m \wedge x\}.$$

Az $m < x$ esetben a második tag $= 0$, különben a szimmetria és a függetlenség alapján

$$\begin{aligned}\int_{\{M \leq m\}} \frac{I_{\{x<M\}}(\omega)}{F(M(\omega))}\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) &= \iint \frac{I_{\{u \vee v \leq m\}}(u,v) I_{\{x < u \vee v\}}(u,v)}{F(u \vee v)}\,\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v) \\ &= 2\int_x^m \left[\int_{-\infty}^v \frac{1}{F(v)}\,\mathrm{d}F(u)\right]\mathrm{d}F(v) \\ &= 2(F(m) - F(x)).\end{aligned}$$

Tehát a jobb oldal

$$= \begin{cases} \mathbf{P}\{M \leq m\} = F(m)^2, & \text{ha } m < x, \\ \mathbf{P}\{M \leq x\} + F(x)(F(m) - F(x)) = F(m)F(x), & \text{ha } m \geq x. \end{cases}$$

A bal oldal pedig

$$\mathbf{P}\{\{M \leq m\} \cap \{X \leq x\}\} = \begin{cases} \mathbf{P}\{M \leq m\} = F(m)^2, & \text{ha } m < x, \\ \mathbf{P}\{Y \leq m, X \leq x\} = F(m)F(x), & \text{ha } m \geq x, \end{cases}$$

amivel az állítást beláttuk.

8.8. Legyenek X, Y független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók, folytonos F eloszlásfüggvénnyel, és legyen $Z := \max\{X, Y\}$. Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{X+Y \leq x|Z\}$ feltételes eloszlást!

Általánosabban: Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók folytonos F eloszlásfüggvénnyel, és jelölje Z a maximumukat. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_n \leq x|Z = z\} = \left(F^{(z)}\right)^{*(n-1)}(x-z),$$

ahol $F^{(c)}(x) = F(x)/F(c)$, $x \in [0, c]$, azaz a c-nél megvágott változó eloszlása.

8.9. Legyen X $\mathcal{G}$-mérhető, Y pedig $\mathcal{G}$-től független véletlen változó, és $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}\left[h(X, Y)|\mathcal{G}\right] = \int h(X, y)\mathrm{d}G(y),$$

ahol G az Y eloszlásfüggvénye. Speciálisan, ha X és Y függetlenek, akkor

$$\mathbf{E}[h(X, Y)|X = x] = \mathbf{E}h(x, Y).$$

Segítség. Először lássuk be az állítást $h(x, y) = I_A(x) \cdot I_B(y)$ alakú függvényekre.

8.10. Legyen Z standard normális véletlen változó, $t \in \mathbb{R}$ valós szám. Határozzuk meg az $\mathbf{E}(Z|\min\{Z, t\})$ feltételes várható értéket! ([6])

8.11. Vigyázat intuícióellenes! Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, ahol λ a Lebesgue-mérték, és legyen $\mathcal{G}$ a megszámlálható vagy ko-megszámlálható halmazok σ-algebrája, azaz $\mathcal{G} = \{A \subset [0, 1] : A \text{ vagy } A^c \text{ megszámlálható}\}$. Ekkor mivel $\{x\} \in \mathcal{G}$, minden x-re, ezért ha egy kimenetelről el tudom dönteni, hogy egy $\mathcal{G}$-beli halmaznak eleme vagy se, akkor tudom a kimenetelt. Ez azt sugallná, hogy $\mathbf{P}(A|\mathcal{G}) = I_A$. DE NEM!!, hisz ez nem is $\mathcal{G}$-mérhető. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbf{P}\{A\}$! ([2])

8.12. Jelölje $g(y)$ az Y, $f(x)$ az X sűrűségfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y|x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

([3])

8.13. Legyen az (X, Y) véletlen vektorváltozó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett! Számítsuk ki az $\mathbf{E}[Y^2|X = x]$ feltételes várható értéket. ([3] 2.3.5.)

8.14. Legyenek X, Y, Z független exponenciális eloszlású véletlen változók, λ, μ, ν paraméterekkel. Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{X > Y\}$, $\mathbf{P}\{X > Y > Z\}$ valószínűségeket.

8.15. Találomra egymástól függetlenül választunk egy pontot a négyzet kerületén és belsejében. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint a négyzet oldala? ([3])

8.16. Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Jelölje $S = X + Y$ az összegüket! Határozzuk meg az X-nek az S-re vonatkozó feltételes eloszlását! Adjuk meg a feltételes sűrűségfüggvényt és ismerjünk rá az eloszlásra! Fordítva, határozzuk meg S-nek az X-re vonatkozó feltételes eloszlását, sűrűségfüggvényét, és ismerünk rá az eloszlásra. Számítsuk ki az $\mathbf{E}[X^k|S = s]$, $\mathbf{E}[S^k|X = x]$, $k = 1, 2$, feltételes várható értéket!

8.17. Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Jelölje $M = \max\{X, Y\}$ a maximumukat és $S = X + Y$ az összegüket. Határozzuk meg az S-nek az M-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét, és az M-nek az S-re vonatkozó feltételes sűrűségét!

Megoldás. Könnyen meggondolható, hogy $S \geq M \geq S/2 \geq 0$. Legyen m, s olyan, hogy $0 < s/2 < m < s$. Vezessük be a

$$T_{s,m} = \{(u, v) : \ 0 \leq u, v \leq m, \ u + v \leq s\}$$

jelölést. Ekkor a szimmetriát kihasználva

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{S \leq s, M \leq m\} &= \iint_{T_{s,m}} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 2\left[\int_0^{s/2}\int_0^u \mathrm{e}^{-u-v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u + \int_{s/2}^m\int_0^{s-u} \mathrm{e}^{-u-v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\right] \\
&= 1 - 2\mathrm{e}^{-m} + \mathrm{e}^{-s} + (2m - s)\mathrm{e}^{-s}.
\end{aligned}$$

Ezt deriválva kapjuk, hogy az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{S,M}(s, m) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-s}, & \text{ha } 0 < s/2 < m < s, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Innen, vagy akár direkt számolással megkaphatjuk a marginális sűrűségeket, melyek

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S,M}(s,m)\mathrm{d}m = \int_{s/2}^{s} 2\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}m = s\mathrm{e}^{-s},\ s > 0,$$
$$f_M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S,M}(s,m)\mathrm{d}s = \int_{m}^{2m} 2\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = 2\left(\mathrm{e}^{-m} - \mathrm{e}^{-2m}\right).$$

Látjuk, hogy S gamma eloszlást követ, amit persze már korábban is tudtunk. Innen a feltételes sűrűségek definíció szerint számolhatók, így

$$g_{S|M}(s|m) = \frac{f_{S,M}(s,m)}{f_M(m)} = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{\mathrm{e}^{-m} - \mathrm{e}^{-2m}}, \quad \text{ha } m \le s \le 2m,$$
$$g_{M|S}(m|s) = \frac{f_{S,M}(s,m)}{f_S(s)} = \frac{2}{s}, \quad \text{ha } s/2 \le m \le s.$$

Azaz az összegre feltételesen a maximum egyenletes eloszlású az $(S/2, S)$ intervallumon.

Némi számolással meghatározhatjuk a feltételes várható értéket is,

$$\mathbf{E}[S|M = m] = \int_{-\infty}^{\infty} s g_{S|M}(s|m)\mathrm{d}s = m + 1 - \frac{m}{\mathrm{e}^m - 1}.$$

8.18. Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Legyen $U = X \wedge Y$, $V = X \vee Y$. Határozzuk meg a maximum minimumra vett feltételes sűrűségét, és fordítva, azaz adjuk meg a $g_{U|V}(u|v)$, $g_{V|U}(v|u)$ feltételes sűrűségeket! Ismerjünk rá a kapott eloszlásokra!

8.19. Legyenek X, Y független azonos eloszlású véletlen változók, f sűrűségfüggvénnyel. Legyen $U = X \wedge Y$, $V = X \vee Y$. Határozzuk meg a maximum minimumra vett feltételes sűrűségét, és fordítva, azaz adjuk meg a $g_{U|V}(u|v)$, $g_{V|U}(v|u)$ feltételes sűrűségeket!

Megoldás. Mivel $U \le V$, így az $f_{U,V}(u,v)$ együttes sűrűség 0, ha $v < u$. Ha $v \ge u$, akkor némi számolással

$$\mathbf{P}\{U \le u, V \le v\} = F(u)(2F(v) - F(u)),$$

ahol F a közös eloszlásfüggvény. Így

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\mathbf{P}\{U \le u, V \le v\} = 2f(u)f(v),\ u \le v.$$

A marginális sűrűséget innen integrálással, vagy direkt számolással meghatározhatjuk. Kapjuk, hogy

$$f_U(u) = 2[1 - F(u)]f(u),$$
$$f_V(v) = 2F(v)f(v).$$

A feltételes sűrűségek

$$g_{V|U}(v|u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{f(v)}{1 - F(u)}, \ v \geq u,$$
$$g_{U|V}(u|v) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)} = \frac{f(u)}{F(v)}, \ u \leq v.$$

Vegyük észre, hogy a $g_{U|V}(\cdot|v)$ sűrűség egy olyan F eloszlású változó sűrűsége, amiről feltesszük, hogy v-nél kisebb, a $g_{V|U}(\cdot|u)$ pedig egy olyan F eloszlású változó sűrűsége, amiről feltesszük, hogy u-nál nagyobb. Hát persze, pontosan ezt kellett kapjuk.

8.20. Egyenletes eloszlás szerint választok egy p értéket a $[0, 1]$ intervallumon, majd gyártok egy olyan érmét, mely p valószínűséggel ad fejet. Jelölje X annak a dobásnak a sorszámát, mikor először dobok fejet. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét. Ugyanez lesz a várható érték, ha egy olyan érmét dobálok, mely $E(p)$ valószínűséggel ad fejet? *Szűcs Gábor feladata*

8.21. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, és $X = x$ esetén legyen Y egyenletes eloszlású a $(0, x)$ intervallumon. Adjuk meg (X, Y) eloszlását, a peremeloszlásokat, várható érték vektort és a kovarianciamátrixot! *Szűcs Gábor feladata*

8.22. Legyen λ E(0,1) eloszlású véletlen változó. Legyen az X a $\lambda = \lambda_0$ feltétel mellett $\text{Exp}(\lambda_0)$ eloszlású véletlen változó. Adjuk meg X eloszlásfüggvényét! ([3])

8.23. Legyenek W_1, W_2, W_3 együttesen normális eloszlásúak 0 várható érték vektorral és $\Sigma = (\min\{i, j\})_{i,j=1}^3$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg a $(W_1, W_2 - W_1, W_3 - W_2)$ vektor sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg W_2 eloszlását feltéve, hogy a $W_1 = w_1$ és $W_3 = w_3$ adottak! (Azaz adjuk meg a $g_{W_2|W_1,W_3}(y|x, z)$ feltételes sűrűségfüggvényt, és ismerjünk rá az eloszlásra!)

Megoldás. Először meghatározzuk $W_1, W_2 - W_1, W_3 - W_2$ együttes sűrűségfüggvényét. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Vezessük be a $W = (W_1, W_2, W_3)^\top$ jelölést. Látjuk, hogy

$$AW = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 - W_1 \\ W_3 - W_2 \end{pmatrix} =: Y.$$

Az Y nulla várható értékű normális eloszlású vektor, melynek kovarianciamátrixa

$$\mathrm{Cov}(Y) = \mathbf{E}YY^\top = \mathbf{E}AWW^\top A^\top = A\Sigma A^\top.$$

Némi számolással kapjuk, hogy ez éppen az egységmátrix. Azaz az Y normális eloszlású vektor komponensei korrelálatlanok, de a normalitás miatt ekkor függetlenek is. Tehát Y komponensei független standard normálisok. Mivel $W = A^{-1}Y$, így meghatározhatjuk W sűrűségét. Legyen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ háromdimenziós Borel-halmaz. Ekkor a sűrűség definíciója, a standard normális sűrűsége alapján, és az $A\mathbf{u} = \mathbf{x}$ transzformációt végrehajtva (a Jacobi-mátrix determinánsa éppen 1)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{W \in B\} = \mathbf{P}\{Y \in AB\} &= \int_{AB} f_Y(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{AB} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_B \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2}{2}\right\} \mathrm{d}\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Tehát a W vektor sűrűségfüggvénye

$$f_{W_1,W_2,W_3}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2}{2}\right\}.$$

Innen meghatározhatjuk (W_1, W_3) együttes sűrűségfüggvényét úgy, hogy az előbbi sűrűséget kiintegráljuk u_2 szerint. Így rövid számolás után

$$f_{W_1,W_3}(u_1, u_3) = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \exp\left\{-\frac{2u_1^2 + u_3^2 - \frac{(u_1+u_3)^2}{2}}{2}\right\}.$$

A feltételes sűrűsége definíció szerint, majd egyszerűsítés után

$$g_{W_2|W_1,W_3}(u_2|u_1, u_3) = \frac{f_{W_1,W_2,W_3}(u_1, u_2, u_3)}{f_{W_1,W_3}(u_1, u_3)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\left(u_2 - \frac{u_1+u_3}{2}\right)^2},$$

ami éppen egy $(u_1 + u_3)/2$ várható értékű, $1/2$ szórásnégyzetű normális sűrűségfüggvénye. Tehát azt kaptuk, hogy

$$W_2|(W_1, W_3) = (u_1, u_3) \sim \mathrm{N}\left(\frac{u_1 + u_3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

8.24. Legyen $X \in [0,1]$. Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy

$$(X|X \leq a) \stackrel{\mathcal{D}}{=} aX, \text{ minden } a \in [0,1] \text{ esetén,}$$

azaz feltéve, hogy $X \leq a$, X ugyanolyan eloszlású, mint aX.

Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy

$$(X|X > a) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (1-a)X + a, \text{ minden } a \in [0,1] \text{ esetén.}$$

Mutassuk meg, hogy ha X-re teljesül mindkét feltétel, akkor X egyenletes eloszlású $[0,1]$-en!

8.25. Legyen $X \in [0,1]$. Mi a szükséges és elegendő feltétele az $I(X \leq 1/2)$ és $\min\{X, 1-X\}$ változók függetlenségének?

8.26. A Marsra leszáll három űrhajó egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Két űrhajó akkor tud egymással rádiókapcsolatot létesíteni, ha a bolygó középpontjával bezárt szögük kisebb, mint $\pi/2$. Mennyi a valószínűsége, hogy bármely két űrhajó tud kommunikálni egymással, esetleg a harmadik közvetítésével?

8.27. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású nemnegatív véletlen változók, melyekre $\mathbf{E}X < \infty$. Legyen $A > 0$ rögzített és $N = \min\{k : X_k \geq A\}$. Tegyük föl, hogy $\alpha = \mathbf{P}\{X \geq A\} > 0$.

(a) Határozzuk meg N eloszlását.

(b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}X_N = \alpha^{-1} \int_A^\infty xF(\mathrm{d}x)$.

(c) Mutassuk meg, hogy ha $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ akkor $\mathbf{E}X_N = A + \lambda^{-1}$.

(d) Igazoljuk, hogy N és X_N függetlenek.

([1])

8.28. Legyenek X és Y négyzetintegrálható véletlen változók, hogy $\mathbf{E}(X|Y) = Y$ és $\mathbf{E}(Y|X) = X$. Igazoljuk, hogy $X = Y$ m.b. Lássuk be úgy is a feladatot, ha a változók csak integrálhatók! ([5] 1.4.)

8.29. Legyen X korlátos véletlen változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, továbbá $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{H}_n$ rész-σ-algebrái $\mathcal{A}$-nak. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} Y, \quad \mathbf{E}(X|\mathcal{H}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} Y.$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$! ([5] 1.7.)

8.30. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók egy sorozata, hogy $X_n \to 0$ m.b. és $|X_n| \leq 1$ minden n-re. Legyenek $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$ rész-σ-algebrái $\mathcal{A}$-nak! Következik-e ezekből, hogy $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{G}_n) \to 0$ m.b.? ([5] 3.9.)

9. Centrális határeloszlás-tétel

Szériasorozatok, aszimptotikus elhanyagolhatóság, Lindeberg–Feller-tétel

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn tekintsük véletlen változók

$$\begin{array}{ll} X_{11} & , \dots, X_{1r_1} \\ X_{21} & , \dots, X_{2r_2} \\ \vdots & \\ X_{n1} & , \dots, X_{nr_n} \\ \vdots & \end{array}$$

szériasorozatát, ahol $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitív egészek sorozata (általában $r_n \to \infty$). Általában feltesszük, hogy az egy sorban levő változók függetlenek, de a különböző sorban levő változókról ezt nem tesszük fel. Vezessük be a

$$\sigma_{nk}^2 = \mathbf{D}^2(X_{nk}) = \mathbf{E}([X_{nk} - \mathbf{E}(X_{nk})]^2)\,, \ k = 1, \dots, r_n\,, \ \text{és } s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{nk}^2$$

jelöléseket. A szériasorozatokra vonatkozó Lindeberg-feltétel a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \int_{\{|X_{nk}-\mathbf{E}(X_{nk})|\ge \varepsilon s_n\}} \Big(X_{nk}-\mathbf{E}(X_{nk})\Big)^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P} = 0\,, \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén,}$$

vagy, ami ugyanaz

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \int_{\{|Y_{nk}|\ge\varepsilon\}} Y_{nk}^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \int_{\{|x|\ge\varepsilon\}} x^2 \mathrm{d}G_{nk}(x) = 0\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

ahol $Y_{nk} = [X_{nk} - \mathbf{E}(X_{nk})]/s_n$, $G_{nk}(x) = \mathbf{P}\{Y_{nk} \le x\} = F_{nk}(s_n x)$, $F_{nk}(x) = \mathbf{P}\{X_{nk} - \mathbf{E}(X_{nk}) \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, r_n$; a szériasorozatokra vonatkozó Ljapunov-feltétel pedig az, hogy valamely $\delta > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbf{E}\Big(|X_{nk} - E(X_{nk})|^{2+\delta}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbf{E}(|Y_{nk}|^{2+\delta}) = 0\,.$$

A Lindeberg-feltétel gyengébb, mint a Ljapunov-feltétel.

Lindeberg centrális határeloszlás-tétele szériasorozatokra. *Legyen* $\{X_{n1}, \dots, X_{nr_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *egy szériasorozat, ahol* $\mathbf{E}(X_{nk}^2) < \infty$, $k = 1, \dots, r_n$,

$n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy minden n-re az n-edik sorban levő $X_{n1}, \dots, X_{nr_n}$ véletlen változók függetlenek. Ha a Lindeberg-feltétel teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{r_n}\{X_{nk} - \mathbf{E}(X_{nk})\}}{s_n} \le x \right\} = \Phi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

vagy ami ugyanaz $\overline{S}_n := \sum_{k=1}^{r_n} Y_{nk} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, ahol Z standard normális.

Az ebben a fejezetben szereplő feladatok Csörgő Sándor feladatai közül valók.

9.1. Legyen $\{X_{n,1}, \dots, X_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ soronként független szériasorozat, melyre teljesül, hogy $\mathbf{P}\{X_{n,k} = 1\} = p_{nk} = 1 - \mathbf{P}\{X_{n,k} = 0\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Tegyük föl, hogy teljesül a

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \min_{1\le k\le n} p_{nk} \le \limsup_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} p_{nk} < 1$$

feltétel. A $\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$ sorösszegekre mondjuk ki és bizonyítsuk be a centrális határeloszlás-tételt.

Megoldás. Mivel $\mathbf{E}X_{nk} = p_{nk}$ és $\mathbf{Var}X_{nk} = p_{nk}(1 - p_{nk})$, ezért a centrális határeloszlás-tétel azt állítja, hogy

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{nk} - \sum_{k=1}^{n} p_{nk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(1 - p_{nk})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0, 1).$$

Megmutatjuk, hogy a Lindeberg-feltétel teljesül. Ehhez először belátjuk, hogy $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(1 - p_{nk}) \to \infty$. Valóban

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}(1 - p_{nk}) \ge n \min_{1\le k\le n} p_{nk} \left(1 - \max_{1\le k\le n} p_{nk}\right).$$

A feladat feltétele szerint a becslés jobb oldala végtelenbe tart, hiszen hiszen nagy n-re a minimum és az $1-$ maximum is valami pozitív korlát fölött marad. Ugyanakkor, ha $\varepsilon s_n > 2$, akkor

$$\{|X_{nk} - p_{nk}| > \varepsilon s_n\} = \emptyset,$$

vagyis a Lindeberg feltételben szereplő összeg minden tagja 0, így ekkor $L_n(\varepsilon) = 0$. Mivel $s_n \to \infty$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan n_0, hogy $n \ge n_0$ esetén $\varepsilon s_n > 2$, és ekkor $L_n(\varepsilon) = 0$. Azaz a Lindeberg-feltétel, és így a CHT is teljesül.

9.2. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók 0 várható értékkel és 1 szórással. Tetszőleges $k = 1, 2, \ldots$ számra tekintsük az $X_k = k^\alpha Y_k$ változót, ahol α valós paraméter. Milyen α paraméterekre teljesül a Lindeberg-feltétel? Az ilyen α értékekre adjunk az $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ összeg szórására zárt aszimptotikus formulát. Mi történik az S_n összegekkel olyan α paraméter esetén, melyre a Lindeberg-feltétel nem teljesül?

Megoldás. Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{E}X_k = k^\alpha \mathbf{E}Y_k \equiv 0, \quad \mathbf{Var}X_k = k^{2\alpha}\mathbf{Var}Y_k = k^{2\alpha}.$$

Ezért $s_n^2 = \sum_{k=1}^n k^{2\alpha}$, ami pontosan akkor konvergens, ha $\alpha < -1/2$, és

$$s_n^2 \sim \begin{cases} \log n, & \text{ha } \alpha = -1/2, \\ \frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}, & \text{ha } \alpha > -1/2. \end{cases}$$

Mivel

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n \int_{\{|X_k| > \varepsilon s_n\}} X_k^2 \mathrm{d}\mathbf{P},$$

ezért látjuk, hogy ha $L_n(\varepsilon) \to 0$ minden $\varepsilon > 0$ esetén, akkor szükségképpen $s_n \to \infty$. Vagyis az $\alpha < -1/2$ esetben a Lindeberg-feltétel nem teljesül. Vizsgáljuk tehát az $\alpha \geq -1/2$ esetet. Ha $\alpha \geq 0$, akkor $s_n/k^\alpha \geq s_n/n^\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ha pedig $\alpha < 0$, akkor $s_n/k^\alpha \geq s_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Nemnegatív függvényt integrálva az integrálási tartomány növelésével az integrál is nő, így

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) &= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n \int_{\{|Y_k| > \varepsilon s_n/k^\alpha\}} k^{2\alpha} Y_k^2 \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &= \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n k^{2\alpha} \int_{\{|Y| > \varepsilon s_n/k^\alpha\}} Y^2 \mathrm{d}\mathbf{P} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n k^{2\alpha} \int_{\{|Y| > \varepsilon s_n/n^\alpha\}} Y^2 \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\{|Y| > \varepsilon s_n/n^\alpha\}} Y^2 \mathrm{d}\mathbf{P}, & \text{ha } \alpha \geq 0, \\ \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n k^{2\alpha} \int_{\{|Y| > \varepsilon s_n\}} Y^2 \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\{|Y| > \varepsilon s_n\}} Y^2 \mathrm{d}\mathbf{P}, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{E}Y^2 < \infty$, és $s_n/n^\alpha \to \infty$, ha $\alpha \geq 0$, és $s_n \to \infty$, ha $\alpha \in (-1/2, 0)$, így a Lebesgue majoráns konvergenciatétel szerint mindkét esetben teljesül az $L_n(\varepsilon) \to 0$ Lindeberg-feltétel, így a CHT is.

Visszatérve az $\alpha < -1/2$ esetre, ekkor $\sum_{n=1}^\infty VarX_n < \infty$, így Kolmogorov egy sor tétele szerint $\sum_{n=1}^\infty X_n < \infty$ m.b. Persze ebben az esetben is lehet normális az összeg (ha minden tag normális), de általában nem lesz az.

9.3. Legyen $\{X_{n1}, \ldots, X_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ soronként független szériasorozat, melyre teljesül, hogy $\mathbf{P}\{X_{nk} = a_n\} = \mathbf{P}\{X_{nk} = -a_n\} = p_n/2$ és $\mathbf{P}\{X_{nk} = 0\} = 1 - p_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, valamilyen $a_n > 0$ és $p_n \in (0, 1)$ esetén.

(a) Mi a Ljapunov-feltétel teljesülésének szükséges és elegendő feltétele?

(b) Mi a Lindeberg-feltétel teljesülésének szükséges és elegendő feltétele?

(c) Mi a centrális határeloszlás-tétel szükséges és elegendő feltétele? Mondjuk ki a tételt, ha igaz.

(d) Tegyük föl, hogy $np_n \to \lambda$, valamilyen $\lambda > 0$ számra. Adjunk meg olyan $b_n > 0$ sorozatot, hogy a

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{kn}}{b_n}$$

határeloszlása létezik, nem-elfajult, és azonosítsuk az eloszlást!

9.4. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, melyekre

$$\mathbf{P}\{X_k = -k^{1/4}\} = \frac{1}{2\sqrt{k}} = \mathbf{P}\{X_k = k^{1/4}\}, \text{ és } \mathbf{P}\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

$k = 1, 2, \ldots$. Teljesül-e a centrális határeloszlás-tétel az $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ összegekre?

9.5. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, melyekre

$$\mathbf{P}\{X_k = -k^{1/2}\} = \frac{1}{2k} = \mathbf{P}\{X_k = k^{1/2}\}, \text{ és } \mathbf{P}\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2k},$$

$k = 1, 2, \ldots$. Teljesül-e a centrális határeloszlás-tétel az $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ összegekre?

9.6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Poisson(λ) eloszlású véletlen változók, $\lambda > 0$. Igaz-e a centrális határeloszlás-tétel a

$$\frac{X_1}{\sqrt{1}}, \frac{X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_3}{\sqrt{3}}, \ldots$$

sorozat részletösszegeire?

9.7. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Poisson eloszlású véletlen változók, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ paraméterrel.

(a) Mit állíthatunk az $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ összeg eloszlásáról?

(b) Mi mondható az S_n határeloszlásáról, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$?

(c) Teljesül-e a centrális határeloszlás-tétel a $\lambda_n \equiv \lambda > 0$ esetben?

9.8. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változók, $\lambda > 0$. Igaz-e a centrális határeloszlás-tétel a

$$\frac{X_1}{\sqrt{1}}, \frac{X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_3}{\sqrt{3}}, \ldots$$

sorozat részletösszegeire?

9.9. Legyen $\{X_{n,1}, \ldots, X_{n,n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ soronként független szériasorozat, melyre teljesül, hogy $\mathbf{P}\{X_{n,k} = -1\} = \mathbf{P}\{X_{n,k} = 1\} = p_n/2$ és $\mathbf{P}\{X_{n,k} = 0\} = 1 - p_n$, $k = 1, 2, \ldots, n^2$, valamilyen $p_n \in (0,1)$ sorozatra, melyre $p_n \to 0$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az $S_n = X_{1,n} + \ldots + X_{n,n^2}$ összegekre teljesüljön a centrális határeloszlás-tétel?

9.10. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, és tekintsük véletlen változók $\{X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ szériasorozatát, ahol az n-edik sor változói függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-\sqrt{3}n^{\alpha}, \sqrt{3}n^{\alpha}]$ intervallumon. Az α paraméter milyen értékeire teljesül a CHT az $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ részletösszegekre? Ekkor mondjuk ki a tételt!

9.11. Legyen α valós konstans és tekintsük független véletlen változók $X_1, X_2, \ldots$ sorozatát, ahol X_k egyenletes eloszlású a $[-\sqrt{3}k^{\alpha}, \sqrt{3}k^{\alpha}]$ intervallumon, $k = 1, 2, \ldots$.

(a) Határozzuk meg azon α értékeket, melyekre teljesül a CHT az $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ részletösszegekre!

(b) Mit mondhatunk S_n aszimptotikus viselkedéséről olyan α esetén, amikor nem teljesül a CHT?

9.12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, melyekre

$$\mathbf{P}\{X_k = -k^{\alpha}\} = \frac{1}{2k^{2\alpha}} = \mathbf{P}\{X_k = k^{\alpha}\}, \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k^{2\alpha}},$$

ahol $\alpha > 0$. Adjuk meg α azon értékeit, melyekre teljesül a CHT az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat részletösszegeire! Mondjuk ki a tételt amikor igaz!

9.13. Legyenek $X_2, X_3, \ldots$ független véletlen változók, melyekre

$$\mathbf{P}\{X_n = -5\} = \frac{1}{2n(\log n)^{\alpha}} = \mathbf{P}\{X_n = 5\}, \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}},$$

ahol $\alpha > 0$.

(a) Az α paraméter milyen értékeire lesz a $\sum_{n=2}^{\infty} X_n$ sor majdnem biztosan konvergens?

(b) Az α paraméter milyen értékeire teljesül a CHT az $X_2 + \ldots + X_n$ részletösszegekre? Mondjuk ki a tételt, ha igaz!

9.14. Tekintsük véletlen változók $\{X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ szériasorozatát, ahol az n-edik sor változói függetlenek és folytonos eloszlásúak a közös

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2c_n^4}{|x|^5}, & \text{ha } |x| \geq c_n, \\ 0, & \text{ha } |x| < c_n, \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel. Milyen $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitív sorozatok esetén teljesül a CHT a sorösszegekre? Ekkor mondjuk is ki a tételt!

9.15. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ fügsgetlen, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges szórása $\sigma > 0$ és várható értékük μ. Legyen $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, és legyen h a μ egy környezetében értelmezett függvény, mely differenciálható μ-ben, és $h'(\mu) \neq 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{n} \frac{h(\overline{X}_n) - h(\mu)}{\sigma h'(\mu)}$$

aszimptotikusan standard normális eloszlású!

10. Martingálok diszkrét időben

Definíció, opcionális megállási tétel, martingál konvergencia tétel

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn $\{\mathcal{F}_n\}_n$ *filtráció* ha σ-algebrák monoton bővülő rendszere, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathcal{A}$), és $\{X_n\}_n$ véletlen változók sorozata.

A filtrációra úgy gondolunk, mint információra, ahogy időben halad előre a folyamat. Az n-edik időpontban rendelkezésünkre álló információ az $\mathcal{F}_n$ σ-algebra. Innen természetes, hogy monoton nő a σ-algebrák sorozata.

Az $\{X_n\}_n$ sorozat *adaptált* az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációhoz, ha minden n esetén X_n mérhető $\mathcal{F}_n$ szerint. Az $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ sorozat *martingál*, ha

(i) $\{X_n\}$ adaptált az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációhoz;

(ii) $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ minden n esetén;

(iii) $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ m.b.

A martingálokra, mint igazságos játékra gondolhatunk. Ha az n-edik időpontban X_n forintunk van, akkor az $(n+1)$-edik időpontban várhatóan ugyanennyi lesz.

Az $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ sorozat *szubmartingál (szupermartingál)*, ha (i), (ii) teljesül, és $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ $(\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n)$ m.b. minden n esetén.

Doob-felbontás. *Legyen $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ szubmartingál, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ekkor létezik $\{M_n, Z_n\}$ sorozat, melyre $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$ martingál, $Z_1 = 0$, $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$ m.b., és Z_n előrejelezhető. Továbbá, ez az előállítás egyértelmű.*

A $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ nemnegatív egész értékű (kiterjesztett) véletlen változó *megállási idő* az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációra nézve, ha minden n esetén $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

A definíció azt fejezi ki, hogy ha az n-edik időpontban megállok, azaz $\tau = n$, akkor ezt a döntésemet az n-edik időpontig felhalmozott információ alapján hozom meg. Ha a következő tétel martingálokra mondjuk ki, akkor az egyenlőtlenség helyett egyenlőség van. Ez azt fejezi ki, hogy ha adott egy igazságos szerencsejáték, ahol tehát a várható nyereményem 0, akkor akármilyen ügyes megállási stratégia (azaz megállási idő) használatával sem tudok jól kijönni a játékból.

Opcionális megállási tétel (Doob). *Legyen $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ szubmartingál, σ, τ megállási idők, $\sigma \leq \tau$ m.b. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}|X_\sigma| < \infty$, $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$ és* $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau > n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$. *Ekkor $\mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$ m.b.*

Wald-azonosság. *Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású véletlen változók, melyekre $\mathbf{E}X = \mu < \infty$, továbbá legyen τ az $\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve megállási idõ, melyre $\mathbf{E}(\tau) < \infty$. Legyen $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\mathbf{E}(S_\tau) = \mu\mathbf{E}(\tau)$.*

Az alábbi állítás a Kolmogorov-féle maximál egyenlőtlenség messzemenő általánosítása.

Doob maximál egyenlőtlensége. *Legyen $\{X_k, \mathcal{F}_k\}$ szubmartingál és legyen $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$. Ekkor tetszőleges $k > 0$ esetén*

$$x\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \int_{\{M_n \geq x\}} X_n \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \mathbf{E}X_n^+,$$

ahol $a^+ = \max\{a, 0\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám pozitív részét jelöli.

10.1. Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $\mathbf{E}X = 0$. Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \dots + X_n$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i : i = 1, 2, \dots, n)$ filtrációra nézve.

Megoldás. Világos, hogy X_n mérhető $\mathcal{F}_n$-re, hisz $\mathcal{F}_n \supset \sigma(X_n)$. A feltétel szerint $\mathbf{E}|X| < \infty$, így $\mathbf{E}|S_n| \leq n\mathbf{E}|X| < \infty$. Végül, mivel X_{n+1} független az $X_1, \ldots, X_n$ változóktól, így az általuk generált $\mathcal{F}_n$ σ-algebrától is, S_n pedig mérhető erre nézve, ezért

$$\mathbf{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbf{E}(X_{n+1}) = S_n.$$

10.2. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ független, pozitív véletlen változók, melyekre $\mathbf{E}Y_n = 1$. Mutassuk meg, hogy $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_i : i = 1, 2, \ldots, n)$ filtrációra nézve.

10.3. Legyen $\mathcal{F}_n$ tetszőleges filtráció $\mathcal{A}$-ban, és X integrálható véletlen változó. Mutassuk meg, hogy $X_n = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n]$ martingál $\mathcal{F}_n$ filtrációra.

Megoldás. A mérhetőség és az integrálhatóság világos. A toronyszabály alapján

$$\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

10.4. Legyen $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ martingál, és $\{Z_n\}$ véletlen változók egy sorozata, hogy Z_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető és $Z_n(X_n - X_{n-1})$ integrálható. Mutassuk meg, hogy az

$$M_n = \sum_{i=1}^n Z_i(X_i - X_{i-1})$$

folyamat martingál, ahol $X_0 = 0$.

Megoldás. A mérhetőség és az integrálhatóság a feltételek szerint teljesül. Mivel M_n adaptált, Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$-mérhető, és X_n martingál, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[M_n + Z_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= M_n + Z_{n+1}\mathbf{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = M_n.\end{aligned}$$

10.5. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $\mathbf{E}X \geq 0$. Mutassuk meg, hogy $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ szubmartingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i : i = 1, 2, \ldots, n)$ filtrációra nézve, és határozzuk meg a Doob-felbontását.

10.6. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, $\mathbf{E}X_n = 0$, $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma_n^2 < \infty$. Mutassuk meg, hogy $S_n^2 = (X_1 + \cdots + X_n)^2$ szubmartingál, és adjuk meg a Doob-felbontását. (Ha nem szerepel filtráció, akkor mindig a természetes filtrációra vonatkozik az állítás.)

10.7. A játékos csődje. Legyenek $X, X_1, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyekre $\mathbf{P}\{X = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{X = -1\}$, $p \in (0,1)$. Mutassuk meg, hogy $\tau = \tau_{a,b} = \min_n\{S_n \geq b \text{ vagy } S_n \leq -a\}$ megállási idő (a természetes filtrációra).

Az opcionális megállási tétel segítségével igazoljuk, hogy ha $p = 1/2$ akkor

$$\mathbf{P}\{S_\tau = b\} = \frac{a}{a+b} \text{ és } \mathbf{P}\{S_\tau = -a\} = \frac{b}{a+b};$$

ha pedig $p \neq 1/2$, akkor

$$\mathbf{P}\{S_\tau = b\} = \frac{r^b - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}} \text{ és } \mathbf{P}\{S_\tau = -a\} = \frac{1 - r^b}{1 - r^{a+b}},$$

ahol $r = p/(1-p)$.

10.8. Legyenek $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $\mathbf{P}\{X = \pm 1\} = 1/2$. Ekkor $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ egyszerű szimmetrikus bolyongás. Mutassuk meg, hogy $\tau = \min_{n \in \mathbb{N}}\{S_n = 1\}$ megállási idő. Mivel az egyszerű szimmetrikus bolyongás visszatérő (Pólya tétele), így $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}\tau = \infty$.

Segítség. Használjuk a Wald-azonosságot, és vegyük észre, hogy nem használhatjuk!

10.9. Legyen (S_n) egyszerű szimmetrikus bolyongás, és legyen $\tau = \min\{n \geq 1 : S_n \geq -n/3\}$. Igazoljuk, hogy τ megállási idő (S_n)-re, és határozzuk meg a várható értékét!

10.10. Legyenek $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, $\mathbf{P}\{Y = 1/2\} = \mathbf{P}\{Y = 3/2\} = 1/2$. Egy korábbi feladat szerint $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ martingál. Mutassuk meg, hogy $X_n \to 0$ m.b. (Mivel X_n nemnegatív, így a martingál konvergenciatétel szerint 1 valószínűséggel konvergál. De ezt ne használjuk!)

Ez egy példa arra, hogy $\mathbf{E}X_\infty \neq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n$.

10.11. Vezessük le a Kolmogorov-egyenlőtlenséget Doob maximál egyenlőtlenségéből! Azaz, legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független véletlen változók, 0 várható értékkel és véges szórással. Legyen $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \geq k \geq n} |S_k| \geq \lambda\} \leq \frac{\mathbf{E}S_n^2}{\lambda^2}.$$

Hivatkozások

[1] Barczy Mátyás, Pap Gyula: *Valószínűségszámítás II. példatár*. mobiDIÁK könyvtár 2005.
`http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/val2gyak.pdf`

[2] Patrick Billingsley: *Probability and Measure*. Third edition, Wiley 1995.

[3] Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd, Szász Domokos: *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*. Negyedik kiadás, Typotex 2001.

[4] Leo Breiman: *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1968.

[5] Cherny Alexander: The Kolmogorov Students' Competitions on Probability Theory. `http://www.newton.ac.uk/preprints/NI05043.pdf`.

[6] Csörgő Sándor: *Fejezetek a valószínűségelméletből*. Polygon 2010.

[7] Rick Durrett: Probability: *Theory and Examples*, Cambridge University Press, 2010.

[8] B.V. Gnyegyenko, A.N. Kolmogorov: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1951.

[9] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest 1981.

[10] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York 1987