Valószínűségszámítás

6. feladatsor: véletlen vektorváltozók, kovariancia, feltételes várható érték

1. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és varianciáját.

2. Bence és Luca testvérek. Ebéd után mindketten véletlentől függő ideig alszanak. Bence esetében ez átlagosan 2 óra, a szórás 30 perc, míg Luca esetében 1,5 óra, 20 perc szórással. Határozzuk meg Bence és Luca együttes (Bence + Luca) alvásának várható értékét és szórását, ha az alvásmennyiségek egymástól függetlenek, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,5.

3. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független $[0,1]$-en egyenletes eloszlású véletlen változók. Adjuk meg $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, véletlen változó eloszlását, várható értékét és szórását. Határozzuk meg nm_n változó határeloszlását!

4. Három, külsőre egyforma érmével a fejdobás valószínűsége $1/4, 1/2$, és $3/4$. Véletlenszerűen választunk egy érmét, és azzal kétszer dobunk. Legyen η a fej valószínűsége a választott érmén, ξ a dobott fejek száma. Adjuk meg az együttes eloszlást!

5. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást és az összeg várható értékét, szórását!

6. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

7. Legyen az (X, Y) véletlen változó. eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

8. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha}(x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

9. Legyen $f(x,y) = c(x+y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, egy (X,Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Mennyi c értéke? Adjuk meg a peremeloszlásokat, várható érték vektort, kovarianciamátrixot! Számoljuk ki Xe^Y várható értékét!

10. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X + Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

11. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x, y > 0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

12. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $f(x,y) = 4xy$, ha $x, y \in (0,1)$;

(b) $f(x,y) = 6xy^2$, ha $x, y \in [0,1]$;

(c) $f(x,y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0,1)$;

(d) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

13. Legyen az (X,Y) véletlen vektor sűrűsége $f(x,y) = 3/x^5$, ha $x \geq y \geq 0$, $x \geq 1$. Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

14. A számegyenesen egy bolha ugrál. A 0-ból indul és minden ugrásának hossza 1. Minden ugrásnál az előzőektől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1-p$ valószínűséggel pedig balra ugrik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eljut az 1-be?

15. A számegyenesen egy bolha ugrál. A 0-ból indul és minden ugrásának hossza 1. Először az 1-be ugrik, majd a következő ugrás mindig p valószínűséggel az előzővel egyező, $1 - p$ valószínűséggel pedig ellentétes irányú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszajut a 0-ba?

16. Egy bolha ugrál az ABCD négyzet csúcsain, az A csúcsról indulva. Minden egyes ugrásnál $1/2 - 1/2$ valószínűséggel valamelyik szomszédos csúcsba ugrik. A bolha akkor áll meg, ha az utolsó olyan csúcsot is eléri, amin addig még nem volt. Határozzuk meg, hogy melyik csúcs mekkora valószínűséggel lesz utolsó!

17. Legyen K egy egységnyi területű szabályos háromszög, és válasszunk n független véletlen pontot egyenletesen K-ból. Jelölje K_n K összes olyan eltoltjának metszetét, ami tartalmazza a választott pontokat. Mennyi K_n területének a várható értéke?