Valószínűségszámítás

5. feladatsor: várható érték, véletlen változók

1. A $(0,1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Mekkora a valószínűsége, hogy a középső pont a $(1/4, 1/3)$ intervallumba esik?

2. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1,1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

3. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg a szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

4. Legyen az X véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg X várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(X > 4)$?

(d) Legyen $Y = 1/X$. Adjuk meg Y eloszlás–, és sűrűségfüggvényét!

5. Válasszunk $2n+1$ pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint a $[0,1]$ intervallumban. Adjuk meg a középső pont Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

6. Földobunk n-szer egy szabályos pénzérmét. Határozzuk meg az F-I, I-F váltások számának eloszlását, várható értékét és szórását!

7. Egy urnában a fehér és b piros golyó van. Az első fehér golyóig húzunk visszatevés nélkül. Legyen X az első fehérig húzott pirosak száma. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét!

8. Jelölje S_n a fixpontok számát n elem véletlen permutációja során! Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását! (Segítség: Ne próbáljuk meghatározni az eloszlást.)

9. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

10. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

11. Egy szabályos érmét feldobunk 100-szor egymás után. Határozzuk meg az egymást követő fej–fej dobások számának várható értékét!

12. Kupongyűjtő probléma. Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

Útmutatás: Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót.

13. Francia kártyából kihúzunk 20 lapot visszatevéssel. Határozzuk meg a különböző lapok számának várható értékét és szórásnégyzetét!

14. Egy urnában egy piros és egy fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk az urnából, minden húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje X_f annak a kísérletnek a sorszámát, amikor először húztunk fehéret. Adjuk meg X_f eloszlását, várható értékét!

15. Egy halastóban N hal van. Kihalászunk M halat, megjelöljük őket, és visszaeresztjük a tóba. Bizonyos idő elteltével, miután jól elkeveredtek, kihalászunk n-et. Ezek között legyen a megjelöltek száma X. A teljes halállomány N meghatározására az $Mn/(X+1)$ becslést használjuk. Számítsuk ki ennek a várható értékét és szórását! Miért nem a logikusabb Mn/X becslést használjuk?

16. Legyen $X \sim$ Egyenletes$(-1,1)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg a következő véletlen változók sűrűségfüggvényeit: (a) $|X|$; (b) X^2; (c) e^X.

17. Stefan Banach erős dohányos volt. Mindkét zsebében egy-egy doboz gyufát tartott, 100-100 szál gyufával. Minden alkalommal, amikor rágyújtott találomra benyúlt az egyik zsebébe, és az abban levő gyufásskatulyából kivett egy szál gyufát, majd a dobozt visszatette abba a zsebébe, amelyikből kivette. Egyszer csak azt vette észre, hogy a gyufásskatulya kiürült. Határozzuk meg a másik zsebében levő gyufák számának eloszlását!

18. Legyen X véletlen változó az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Mutassuk meg, hogy $\{X > a\}$, $\{X \in (a,b]\}$, $\{X < a\}$, $\{X = a\}$ események!

19. Legyenek X, Y véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Mutassuk meg, hogy $X+Y$, XY, X^2 véletlen változók!

20. Legyenek X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn. Igazoljuk, hogy a következő halmazok mérhetők: (i) $\{\sup_n X_n > 0\}$; (ii) $\{\sup_n X_n = 0\}$; (iii) $\limsup_n X_n \geq 0\}$.

Tetszőleges $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, és $B \subset \mathbb{R}$ esetén $Y^{-1}(B) = \{Y \in B\} = \{\omega : Y(\omega) \in B\}$.

21. Legyenek X_n, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen változók az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn és c tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok mérhetők: $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c\} = \{\lim_{n\to\infty} X_n = c\}$; $\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ létezik}\}$; $\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\}$; $\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq c\}$.