Valószínűségszámítás

2. feladatsor: kombinatorikus valószínűség, szita, geometriai valószínűség

1. Mennyi a valószínűsége, hogy egy n fős társaságban senkinek nincs születésnapja szeptember 21-én? Legalább mekkora legyen n, hogy ez a valószínűsége 1/2-nél kisebb legyen?

2. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

3. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

4. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n-edik dobásra következik be. Határozzuk meg p_n-et!

5. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

6. 100 halálraítélt, 1-től 100-ig megszámozott rabnak a börtönigazgató ad egy utolsó esélyt. Az igazgató egy 100 fiókos (ugyancsak 1-től 100-ig számozott) szekrény fiókjaiba beteszi (véletlen sorrendben) a számokat. Minden fiókba pontosan egy szám kerül. Ezután a rabok egyesével bemennek a szobába, ahol kinyithatnak 50 fiókot. A fiókokat visszacsukják, a szekrényben nem rendezhetik át a számokat, mindent úgy hagynak, ahogy volt. Ha *minden* rab megtalálja a saját számát, akkor kiszabadulnak, különben mindegyiküket kivégzik.

7. Mennyi a valószínűsége, hogy n elem véletlen permutációjában a leghosszabb ciklus xn-nél hosszabb, ahol $x \in (1/2, 1)$?

8. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Hányadik helyen legvalószínűbb a második piros?

9. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

10. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

11. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

12. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

13. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

14. Egy adott n természetes számra két játékos véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választ egy közös $0 \le j \le n$ számot, majd egymástól függetlenül mindegyikük véletlenszerűen kiválasztja $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy j elemű részhalmazát. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ugyanazt a halmazt választották. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 2 \log n + 2\gamma - 1 + o(1),$$

ahol γ az Euler-féle konstans.