A sztochasztika alapjai

7. feladatsor: CHT, statisztika

1. Marc Elsberg Sosem elég című regényében Fitzroy Peel a következő játékot ajánlja. 100 ponttal indulunk. Egy szabályos érmével dobunk százszor. Ha az eredmény fej, a pontszámunk 50%-kal nő, ha írás 40%-kal csökken. Akkor nyerünk száz dobás után több pontunk van, mint 100. Mennyi a nyerés esélye?

2. Egy szerencsejátékon a nyerési esélyed 1/11. Ha nyersz, visszakapod a feltett tétet és még nyereményként annak kilencszeresét. Elegendő sok kezdőtőkével indulva ezer alkalommal felteszel 1–1 petákot. Mi a valószínűsége, hogy ezer játszma után még legalább annyi pénzed van, mint kezdetben volt?

3. Egy játék fizikai terhelhetőségére elvégzett tesztek kg-ban a következő eredményeket adták: 40, 45, 40, 42, 36. A minta alapján adjuk meg a terhelhetőség empirikus eloszlásfüggvényét, mintaátlagát, korrigált/korrigálatlan empirikus szórásnégyzetét!

4. Egy alkatrészekből álló sokaság 6 mintapéldányának következő volt a hónapokban mért teljes élettartama: 39, 45, 67, 50, 50, 60. Adjuk meg az empirikus eloszlásfüggvényt, a mintaátlagot, és a korrigált/korrigálatlan empirikus szórásnégyzetet!

5. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független azonos eloszlású véletlen változók véges μ várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással. Igazoljuk, hogy $\hat{\mu}_1 = X_1$ torzítatlan becslése a várható értéknek! Igazoljuk, hogy $\hat{\mu}_2 = (X_1 + X_2)/2$ is torzítatlan becslése a várható értéknek!

6. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független, Egyenletes$(0, \theta)$ eloszlású véletlen változók, ahol $\theta > 0$. Határozzuk meg $X_{n,n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Mutassuk meg, hogy $T_1(\mathbf{X}) = \frac{n+1}{n} X_{n,n}$ torzítatlan becslése θ-nak! Igazoljuk, hogy T_1 gyengén konzisztens!

7. Egy almáskertben véletlenszerűen, egymástól függetlenül találhatók fertőzött fák. Tíz egyforma nagy, egyenként három sorból álló ültetvényben rendre 0, 3, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 2 beteg fát találtak.

(a) Adjuk meg az empirikus eloszlásfüggvényt, a mintaátlagot és az empirikus szórásnégyzetet!

(b) Tegyük fel, hogy a beteg fák száma Poisson-eloszlást követ. Adjunk maximum likelihood becslést és momentumbecslést az egy sorban található fák számának várható értékére!

8. Egy adott típusú izzó élettartamára öt mérés alapján a következő adataink vannak: 2,3, 4, 1,7, 3,2, 2,8.

(a) Adjuk meg az empirikus eloszlásfüggvényt, a mintaátlagot és az empirikus szórásnégyzetet!

(b) Tegyük fel, hogy a háttéreloszlás exponenciális ismeretlen paraméterrel. Adjunk ML és momentumbecslést a paraméterre!

9. Augusztusban 5 éjszakán át figyeltük meg a hullócsillagok számát. A következő mintát kaptuk: 4, 3, 7, 2, 4. A hullócsillagok száma egy este Poisson-eloszlású. Adjunk ML becslést az eloszlás paraméterére!

10. Egy gyárban a termékek minőségét úgy ellenőrzik, hogy minden nap n terméket vizsgálnak meg. Az adott napi összes gyártmányt akkor fogadják el, ha minden megvizsgált gyártmány jó. Azt tapasztalták, hogy m nap alatt összesen x-szer fogadták el a napi gyártmányokat. Adjunk maximum likelihood becslést annak a valószínűségére, hogy egy termék selejtes!

11. Mendel törvényei szerint egy növény AA, AB, BB genotípusa rendre θ^2, $2\theta(1-\theta)$, $(1-\theta)^2$ arányban fordul elő. Egy területen a három gyakoriságra x_{AA}, x_{AB}, és x_{BB} adódott. Adjunk maximum likelihood becslést θ-ra! Mutassuk meg, hogy a kapott becslés torzítatlan!

12. A színtévesztés leggyakoribb fajtája az X kromoszómához kapcsoltan, nemhez kötötten öröklődik. Emiatt a férfiaknál a gyakoriság p, míg a nőknél csak p^2. Adjunk maximum likelihood becslést p-re, az alapján, hogy M férfiből m, N nőből pedig n volt színtévesztő!

13. Egy céllövő ismeretlen p valószínűséggel talál el egy célpontot. Adjunk ML-becslést p-re, ha az első sikeres lövés k-adikra következett be. Torzítatlan-e a kapott becslés? A második sikeres lövésre további ℓ lövésig kellett várni. Ezt figyelembe véve adjunk ML-becslést p-re!

14. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független véletlen változók, $f(x) = \frac{2x}{3\theta^2}$, $\theta \leq x \leq 2\theta$, sűrűségfüggvénnyel. Adjunk becslést θ-ra momentum módszerrel és ML módszerrel is!

15. Egy játék fizikai terhelhetőségére elvégzett tesztek kg-ban a következő eredményeket adták: 40, 45, 40, 42, 36. Tegyük fel, hogy a háttérváltozó normális eloszlást követ 2 szórással. Adjunk 95%-os konfidenciaintervallumot a várható értékre!

16. Egy véletlen változó értékeit megfigyelve a következő statisztikai mintát kapjuk: 6,5, 7,3, 5,4, 6,5, 2,1.

Tegyük fel, hogy a háttéreloszlás normális, ismert $\sigma = 2$ szórással és ismeretlen μ várható értékkel. Teszteljük 5%-os szignifikanciaszinten azt a nullhipotézist, hogy az elméleti várható érték 8.

17. Egy játék fizikai terhelhetőségére elvégzett tesztek kg-ban a következő eredményeket adták: 40, 45, 40, 42, 36, 41, 43. A 2019. január 1. óta hatályos EU-s ISO-31415 szabvány szerint a gyermekjátékoknak terhelhetősége legalább 40 kg kell legyen.

Tegyük fel, hogy a terhelhetőség normális eloszlást követ ismeretlen μ várható értékkel és ismert $\sigma = 3.1$ szórással. Teszteljük 99%-os szignifikanciaszinten azt a nullhipotézist, hogy a $\mu = 40$.

18. A hároméves Máté reggelente véletlen időpontban ébred. Az elmúlt 5 napban az ébredésekre 6:20, 6:55, 6:30, 7:15, és 6:40 adódott.

(a) Adjuk meg a mintához tartozó mintaátlagot, a tapasztalati szórásnégyzetet és az empirikus eloszlásfüggvényt!

(b) Tegyük fel, hogy Máté ébredésének időpontja normális eloszlást követ ismeretlen μ várható értékkel és $\sigma = 20$ szórással. Adjunk 95%-os konfidenciaintervallumot az ébredés várható értékére!