

## A sztochasztika alapjai

### 6. feladatsor: nevezetes eloszlások, vektorváltozók, de Moivre–Laplace-tétel

1. Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!
2. Egy könyvben, az egyes oldalakon levő sajtóhubák száma Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg a sajtóhubák várható értékét és szórását!
3. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?
4. A skót bakák mellkasának körmérete  $N(88, 10)$  eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?
5. Tegyük fel, hogy Ausztriában a munkavállalók keresete normális eloszlást követ. Tudjuk, hogy a munkavállalók fele keres havi 3000 eurót vagy kevesebbet, míg 5%-uk keres 8000 eurónál többet. Egy törvénytervezet szerint változna az adókulcs az 5000 eurónál többet keresők számára. A munkavállalók mekkora hányadát érinti ez a változtatás?
6. Három, külsőre egyforma érmével a fejdobás valószínűsége  $1/4$ ,  $1/2$ , és  $3/4$ . Véletlenszerűen választunk egy érmét, és azzal kétszer dobunk. Legyen  $\eta$  a fej valószínűsége a választott érmén,  $\xi$  a dobott fejek száma. Adjuk meg az együttes eloszlást!
7. A megtakarított pénzünket értékpapírba fektetjük, 20 darabot vásárolunk az A vállalat és 10 darabot a B vállalat részvényeiből. Egy év múlva a két vállalat részvényei várható értékben 700 illetve 1500 dollárt érnek, az árfolyamok szórása pedig 20 illetve 80 dollár.
  - (a) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama független egymástól. Várhatóan mennyit ér portfólióink egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása?
  - (b) Tegyük fel, hogy a részvények árfolyama nem független egymástól. Az árfolyamok közötti korrelációs együttható függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a portfólió értékének várható értékét és szórásnégyzetét!
  - (c) Milyen kapcsolat van a korrelációs együttható és a befektetés kockázata között? Ha én egy kockázatkerülő befektető vagyok, akkor pozitív vagy negatív korrelációjú értékpapírokból állítsak össze portfóliót?
8. Egy vállalat egy hónapra eső profitja a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is véletlen változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó profit várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a profit várható értékét és szórásnégyzetét!

9. A Real Madrid 2018/2019-es idényben az egy mérkőzésen lőtt góljainak száma Poisson-eloszlást követ  $\lambda = 3$  paraméterrel, míg a kapott gólok száma Poisson-eloszlást követ  $\mu = 0,7$  paraméterrel. Adjuk meg a Real Madrid egy mérkőzésén esett összes gól számának várható értékét és szórásnégyzetét abban az esetben ha

- (a) a lőtt és kapott gólok száma függetlenek;
- (b) a lőtt és kapott gólok számának korrelációs együtthatója 0,4.

10. A gyerekek 30%-a vásott, ők virgácsot is kapnak. Mikulásnál már csak 2230 csomag van, ezek közül 680-ban van virgács. Éppen egy olyan falu fölött repül, ahol 2100 gyerek van. Mennyi a valószínűsége, hogy minden gyereknek jut megfelelő mikuláscsomag?

11. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek  $5/6$  valószínűséggel A menüt,  $1/6$  valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amelyet kér?

12. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok  $p$  arányát. Ehhez kiválasztanak  $n$  egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok  $k$  számát. Legalább mekkora legyen az  $n$ , hogy a kapott  $p' = k/n$  arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi  $p$  arányt, akármi is  $p \in (0, 1)$ ?

13. Magyarországon, és mindenütt a világon, több fiúgyermek születik, mint lány. Az újszülöttek 52%-a fiú, 48%-a lány. Nevezzük *lányos napoknak/heteknek* azokat a napokat/heteket, amikor több lány születik, mint fiú.

- (a) Szegeden naponta 9 gyermek születik. Mennyi a pontos valószínűsége, hogy Szegeden egy adott nap lányos nap? Milyen eloszlású az egy héten bekövetkezett lányos napok száma? Várhatóan hány lányos nap van egy héten?
- (b) Budapesten naponta 100 gyermek születik. Mennyi a közelítő (normális közelítés, de Moivre–Laplace-tétel) valószínűsége, hogy Budapesten egy adott nap lányos nap?
- (c) Egész Magyarországon egy héten 2500 gyermek születik. Mennyi a lányos hét bekövetkezésének közelítő valószínűsége? Várhatóan hány lányos hét lesz 2020-ban? Adjuk meg annak a közelítő valószínűségét (Poisson-közelítés), hogy legalább 3 lányos hét lesz 2020-ban.

14. A sztochasztika alapjai kurzus 400 hallgatójának mindegyike bemegy az első előadásra. Ezt követően minden hallgató minden további előadás előtt feldob egy szabályos pénzérmét. Ha fejet kap, akkor bemegy a következő előadásra, ha írást akkor nem, és utána már egyetlen előadásra sem megy be. Véletlen Vince a 400 hallgató egyike. Mennyi a valószínűsége, hogy Vince az összes előadásra bemegy? Várhatóan hány előadáson vesz részt? Mennyi a valószínűsége, hogy a 12. (utolsó) előadáson lesz hallgató? Várhatóan hány hallgató lesz a 2., 3., utolsó előadáson?