

A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: folytonos véletlen változók

1. A $(0, 1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Mekkora a valószínűsége, hogy a középső pont a $(1/4, 1/3)$ intervallumba esik?

2. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen ξ a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását!

3. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást!

4. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg a szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

5. Legyen a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg ξ várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(\xi > 4)$?

(d) Legyen $\eta = 1/\xi$. Adjuk meg η eloszlás-, és sűrűségfüggvényét!

6. A labdarúgó világbajnokságon az első gólig eltelt percben mért játékidő sűrűségfüggvénye $f(x) = 4050 \cdot (45 + x)^{-3}$, $x > 0$. Mennyi a valószínűsége, hogy az első félidőben gól esik? Mennyi a valószínűsége, hogy az első mérkőzésen nem esik gól? Várhatóan hány percet kell várni az első gólig? (Egy mérkőzés 90 percig tart, 45 perc egy félidő.)

7. A Bergengóc Élettani Kutatási Alap kifejlesztett egy egydózisú vakcinát a Covid- $\pi^2/6$ vírus ellen. A BÉKA vakcina a beadást követően azonnali védelmet biztosít egy véletlen ξ ideig, ahol ξ hónapokban mért sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{8}, & x \in [5, 9], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a BÉKA vakcina fél év után még hatásos? Adjuk meg ξ védettségi idő várható értékét és szórását!

8. A WHO adatai szerint a kétéves lányok testmagassága normális eloszlást követ 86 cm várható értékkel és 3,2 cm szórással. A kétéves kislányok hány százaléka magasabb, mint 92 cm? A Dobó utcai bölcsőde Maci csoportjában 5 két éves lány van. Mennyi az esélye, hogy van köztük 92 cm-nél magasabb?

9. Frankenstein professzor vámpír denevéreket tenyészt a laboratóriumában. A denevérek tépőfogainak a hossza normális eloszlást követ $\mu = 28$ mm átlaggal és $\sigma = 4$ mm szórással. Frankenstein tudja, hogy azoknak az állatoknak a harapása halálos, akiknek a tépőfogmérete a populáció felső 5%-ába esik. Számítsuk ki, hogy ez hány mm-es fogméretet jelent!

10. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

11. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

12. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szóráss?

13. Az EXPO cég wifi routereinek élettartama exponenciális eloszlást követ 3 év várható értékkel. A gyártó 2 év garanciaidőt vállal a termékre. A routerek hány százaléka hibásodik meg garanciaidőn belül? Ha két routert vásárolunk, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy egyik sem romlik el egy éven belül?

14. A Texpo áruházakban az i -edik kasszánál egy vásárló percben számolva i paraméterű exponenciális időt tölt el. A kiszolgálási idők az egyes kasszáknál egymástól függetlenek.

(a) András éppen üresen találja az 1-es kasszát. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 percen belül végez?

(b) Andrással pontosan egyidőben Béla beáll az ugyancsak üres 2-es kasszához. Mennyi a valószínűsége, hogy mindketten 2 percen belül végeznek? Mennyi a valószínűsége, hogy Béla 2 percen belül végez, de András nem?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyikük 2 percen belül végez? Határozzuk meg a hamarabb végző kiszolgálási idejének eloszlását! Tehát András és Béla kiszolgálási idejének a minimumára vagyunk kíváncsiak.

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy András végez hamarabb?

15. Máté a Mikulástól kapott 100 grammos csokoládémikulást egy ültő helyében megeszi. Édesapja megfigyelte, hogy egy 100 grammos csokoládét exponenciális eloszlású idő alatt fogyaszt el, és átlagosan 20 perc alatt végez. Mennyi a valószínűsége, hogy a csokimikulásból még 30 perc után is marad?

Máté unokatestvérével Bencével együtt kapja meg a csomagját. Bence is exponenciális eloszlású idő alatt tünteti el a csokimikulást, ő átlagosan 15 perc alatt. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc alatt mindketten végeznek a csokimikulással, ha a két csokievés időtartama egymástól független?