

## A sztochasztika alapjai

### 4. feladatsor: véletlen változók

1. Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk. Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét és szórását!
2. Egy embernek  $n$  egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Jelölje  $X$  a szükséges próbálkozások számát. Adjuk meg  $X$  eloszlását, ha
  - (a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi;
  - (b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre.
3. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után háromszor. Jelölje  $X$  a dobott fejek és a dobott írások számának a különbségét. Határozzuk meg  $X$  eloszlását és eloszlásfüggvényét (készítsünk ábrát is)! Mi a valószínűsége, hogy  $X$  a  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  intervallumba esik?
4. Egy hallgató 26 tétel közül 16-ot jelesre tud, 8-at jóra, 2-t viszont csak közepesre. A vizsgatételek kiválasztásakor 26 tétel közül húz 1-et. Adjuk meg a kapott jegy értékének eloszlását, várható értékét és szórását!
5. Ötöslottón egy szelvényvel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!
6. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám eloszlását és várható értékét!
7. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!
8. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje  $\xi$  a második piros sorszámát. Adjuk meg  $\xi$  eloszlását!
9. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kivesszek 4 cipőt. Jelölje  $X$  a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg  $X$  eloszlását, várható értékét és szórását!
10. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását?
11. Bence addig rugdos egy labdát egy 10 m hosszú és 5 m magas háznak, amíg el nem talál egy ablakot. A házon két  $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ -es ablak van. Jelölje  $\xi$  az első ablakot találó rúgás sorszámát. Adjuk meg  $\xi$  eloszlását!

**12.** Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindkét-  
ten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatóktól függetlenül),  
 $1/3 - 1/3 - 1/3$  eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának  
várható értékét!

**13.** Máté esténként sokszor belefeledkezik a játékba, emiatt többszöri felszólítás után sem  
jön vacsorázni. Édesapja egyre nyomatékosabban szól, így annak a valószínűsége, hogy a  
 $k$ -adik felszólításra Máté abbahagyja a játékot, az  $1 - 1/(k + 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Adjuk meg  
a szükséges felszólítások számának eloszlását és várható értékét!

**14.** Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel!  
Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

**15.** Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül.  
Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

**16.** Egy urnában egy piros és egy fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk az urnából,  
minden húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje  $\xi$  annak a kísérletnek  
a sorszámát, amikor először húztunk fehéret. Adjuk meg  $\xi$  eloszlását, várható értékét!

**17.** Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad ta-  
xi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól  
függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól  
függetlenül  $2/3$  valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független  
attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad  
taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad  
taxi? A város területe  $28,26 \text{ km}^2$ .

**18.** Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kin-  
der tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder  
tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának  
örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!

**19.** Jelölje  $S_n$   $n$  elem véletlen permutációja során a fixpontok számát. Határozzuk meg  
 $S_n$  várható értékét és szórását!

**20. Kupongyűjtő probléma.** Egy  $N$  különböző elemből álló sokaságból visszatevéses  
mintát veszünk. Jelölje  $S_r$  azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy  
kapjunk  $r$  különböző elemet. Határozzuk meg  $S_r$  várható értékét, szórását, majd adjunk  
ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

**21.** Három, külsőre egyforma érmevel a fejdobás valószínűsége  $1/4$ ,  $1/2$ , és  $3/4$ . Véletlen-  
szerűen választunk egy érmét, és azzal az első fejig dobunk. Legyen  $\xi$  a dobások száma.  
Adjuk meg  $\xi$  eloszlását és várható értékét!