

# A sztochasztika alapjai

## MBNXK262

7. előadás: Várható érték

Kevei Péter

2023/24 tavasz

# Ismétlés

$\xi$  diszkrét  $x_1, x_2, \dots$  lehetséges értékekkel,

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

$\xi$  folytonos  $f(x)$  sűrűségfüggvénnyel,

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy,$$

# Várható érték tulajdonságai

## Állítás

$\xi, \eta$  véletlen változók,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ekkor

$$\mathbf{E}(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \mathbf{P}(\xi = x_i), \text{ ill. } \mathbf{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy,$$

ahol  $f(x)$  az  $\xi$  sűrűségfüggvénye, és

$$\mathbf{E}(h(\xi, \eta)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

# Várható érték tulajdonságai

## Állítás

*A várható érték lineáris, azaz tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  állandókra*

$$\mathbf{E}(a\xi + b) = a\mathbf{E}(\xi) + b.$$

# Várható érték tulajdonságai

## Állítás

*Ha  $a \leq \xi \leq b$ , akkor  $a \leq \mathbf{E}(\xi) \leq b$  tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  számok esetén.*

# Várható érték tulajdonságai

## Állítás

$$\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}(\xi) + \mathbf{E}(\eta).$$

# Várható érték tulajdonságai

## Állítás

*Ha  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  véletlen változók, akkor*

$$\mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\xi_i).$$

## Példa

Csodaország munka törvénykönyve szerint egy cég minden munkása fizetett szabadságot kap azokon a napokon, amikor legalább az egyiküknek születésnapja van. Ezen napok kivételével azonban az év minden napján mindenkinek dolgoznia kell. Minden munkás 1 TV-készüléket készít egy nap alatt. Hány alkalmazottat vegyen fel a cégtulajdonos, ha azt akarja, hogy a gyártott TV-készülékek számának a várható értéke maximális legyen?



# Csodaország

# Csodaország

## Kupongyűjtő probléma

Egy  $N$  különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk.  $S_r$  ennyi elemet kellett húznunk, hogy kapjunk  $r$  különbözőt.

Határozzuk meg  $\mathbf{E}(S_r)$  várható értékét, majd adjunk  $\mathbf{E}(S_N)$ -re kezelhető aszimptotikus egyenlőséget!

# Kupongyűjtő probléma

# Huffman-kód

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  véges halmaz, a *forrásábécé*.

Kód  $f : \mathcal{X} \rightarrow \{\text{véges 0-1 sorozatok}\}$

Az  $f$ -hez tartozó lehetséges kódszavak  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ .

# Huffman-kód

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  véges halmaz, a *forrásábécé*.

Kód  $f : \mathcal{X} \rightarrow \{\text{véges 0-1 sorozatok}\}$

Az  $f$ -hez tartozó lehetséges kódszavak  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ .

Az  $f$  kód *prefix*, ha a lehetséges kódszavak közül egyik sem folytatása a másiknak. Jelölje  $x \in \mathcal{X}$  esetén  $|f(x)|$  a kódszó hosszát.

## Példa

Legyen  $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ , és legyen  $f_1(a) = 0$ ,  $f_1(b) = 01$ ,  
 $f_1(c) = 011$ . Ekkor  $f_1$  nem prefix kód, de könnyen látható, hogy  
egyértelműen dekódolható. Az  $f_2(a) = 01$ ,  $f_2(b) = 00$ ,  
 $f_2(c) = 1$ , kód prefix.

Legyen  $X$  egy véletlen betű, és eloszlása  $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$ ,  
 $k = 1, 2, \dots, n$ . Tehát  $p_k$  a  $x_k$  betű gyakorisága az adott  
nyelvben.



Adott  $f$  kód esetén egy hosszú szövegben az egy karakterre eső átlagos kódszóhossz:

Feltehető, hogy  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . Ha az  $f$  prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \dots \leq |f(x_n)|.$$

Feltehető, hogy  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . Ha az  $f$  prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \dots \leq |f(x_n)|.$$

(ii) A két legkisebb valószínűséghez tartozó kód hossza egyenlő.

Feltehető, hogy  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . Ha az  $f$  prefix kód optimális, akkor feltehető, hogy teljesülnek a következők:

(i) Hosszabb kódhoz ritkább betűk tartoznak, azaz

$$|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \dots \leq |f(x_n)|.$$

(ii) A két legkisebb valószínűséghez tartozó kód hossza egyenlő.

(iii)  $f(x_{n-1})$  és  $f(x_n)$  csak az utolsó bitben térnek el.

## Tétel

*Tegyük fel, hogy az*

$$\mathcal{X}' = \{x_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-1}\}$$

*( $n - 1$ ) elemű forrásábécé és  $p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n$  eloszlás esetén  $g$  egy optimális prefix kód. Ekkor az eredeti problémához tartozó optimális prefix kódot kapunk, ha az  $x_{n-1}$ , ill.  $x_n$  kódját úgy választjuk, hogy a  $g(y_{n-1})$  kódszót kiegészítjük 0-val, ill. 1-gyel, a többi kódszót változatlanul hagyjuk.*

## Példa

Legyen  $n = 6$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_6\}$ , és  $p_1 = 0.132$ ,  $p_2 = 0.329$ ,  
 $p_3 = 0.329$ ,  $p_4 = 0.165$ ,  $p_5 = 0.041$ ,  $p_6 = 0.004$ .

(i)  $x_5, x_6 \rightarrow x_{56}$ ,  $p_{56} = 0.045$ ;

## Példa

Legyen  $n = 6$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_6\}$ , és  $p_1 = 0.132$ ,  $p_2 = 0.329$ ,  
 $p_3 = 0.329$ ,  $p_4 = 0.165$ ,  $p_5 = 0.041$ ,  $p_6 = 0.004$ .

(i)  $x_5, x_6 \rightarrow x_{56}$ ,  $p_{56} = 0.045$ ;

(ii)  $x_1, x_{56}$ ,  $p_{156} = 0.177$ ;

## Példa

Legyen  $n = 6$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_6\}$ , és  $p_1 = 0.132$ ,  $p_2 = 0.329$ ,  
 $p_3 = 0.329$ ,  $p_4 = 0.165$ ,  $p_5 = 0.041$ ,  $p_6 = 0.004$ .

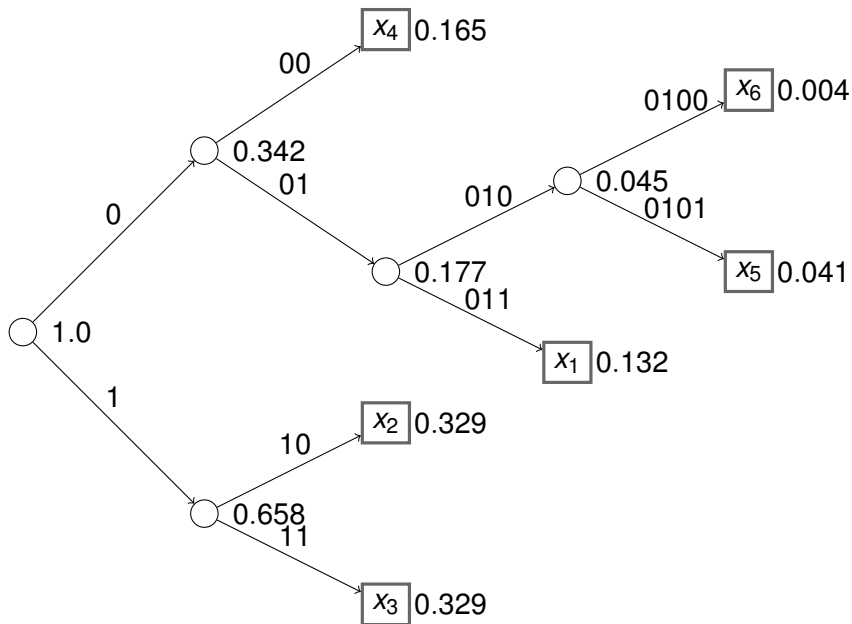
- (i)  $x_5, x_6 \rightarrow x_{56}$ ,  $p_{56} = 0.045$ ;
- (ii)  $x_1, x_{56}$ ,  $p_{156} = 0.177$ ;
- (iii)  $x_{156}, x_4$ ,  $p_{1564} = 0.342$ ;



## Példa

Legyen  $n = 6$ ,  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_6\}$ , és  $p_1 = 0.132$ ,  $p_2 = 0.329$ ,  
 $p_3 = 0.329$ ,  $p_4 = 0.165$ ,  $p_5 = 0.041$ ,  $p_6 = 0.004$ .

- (i)  $x_5, x_6 \rightarrow x_{56}$ ,  $p_{56} = 0.045$ ;
- (ii)  $x_1, x_{56}$ ,  $p_{156} = 0.177$ ;
- (iii)  $x_{156}, x_4$ ,  $p_{1564} = 0.342$ ;
- (iv)  $x_2, x_3$ ,  $p_{23} = 0.658$ .



Így az optimális kód:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
011	10	11	00	0101	0100
0.132	0.329	0.329	0.165	0.041	0.004

A várható érték:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(X)) &= 0.132 \cdot 3 + 0.329 \cdot 2 + 0.329 \cdot 2 \\ &\quad + 0.165 \cdot 2 + 0.041 \cdot 4 + 0.004 \cdot 4 = 2.22 \end{aligned}$$

# Entrópia

Az optimális várható kódhosszra teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^n p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \leq \mathbf{E}(|f(\xi)|) < \sum_{k=1}^n p_k \log_2 \frac{1}{p_k} + 1.$$

Pl.: JPEG, MP3.

# Momentumok

## Definíció

Az  $\xi$  véletlen változó  $k$ -adik momentuma  $\mathbf{E}(\xi^k)$ , és  $k$ -adik centrális momentuma  $\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}\xi)^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\xi^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k \mathbf{P}(\xi = x_i), & \text{ha } \xi \text{ diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, & \text{ha } \xi \text{ folytonos.} \end{cases}$$

# Szórás

## Definíció

Az  $\xi$  véletlen változó szórása  $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2}$ .

# Szórás tulajdonságai

## Állítás

*Tetszőleges  $\xi$  véletlen változó és  $a, b$  valós számok esetén*

- (i)  $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2$ ;
- (ii)  $\mathbf{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}^2(\xi)$ ;
- (iii)  $\mathbf{D}(\xi) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $\xi = \mathbf{E}(\xi)$ , azaz  $\xi$  konstans véletlen változó.

# Szórás tulajdonságai



# Véletlen vektorváltozók

## Definíció

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  véletlen vektorváltozó, ha minden komponense véletlen változó. Eloszlásfüggvénye

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n).$$

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  véletlen vektorváltozó diszkrét, ha értékészlete megszámlálható.

$\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ , eloszlása a peremeloszlás, vagy marginális eloszlás

## Trinomiális eloszlás

Szabályos dobókockával  $n$ -szer dobunk.  $\xi$  a hatosok,  $\eta$  egyesek száma

# Függetlenség

## Definíció

$\xi_1, \dots, \xi_n$  függetlenek, ha minden  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \mathbf{P}(\xi_1 < x_1) \dots \mathbf{P}(\xi_n < x_n).$$

## Állítás

$\xi_1, \dots, \xi_n$  *diszkrét véletlen változók úgy, hogy  $\xi_i$  lehetséges értékei  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, i = 1, 2, \dots, n$ . Ekkor  $\xi_1, \dots, \xi_n$  pontosan akkor függetlenek, ha*

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}) \dots \mathbf{P}(\xi_n = x_{i_n}^{(n)})$$

*tetszőleges  $i_1, \dots, i_n$  indexekre.*

## Állítás

$\xi, \eta$  független diszkrét véletlen változók.

$$\mathbf{E}(g_1(\xi)g_2(\eta)) = \mathbf{E}(g_1(\xi))\mathbf{E}(g_2(\eta)).$$

Speciálisan, ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor  $\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta)$ .

# Kovariancia, korreláció

## Definíció

Az  $\xi$  és  $\eta$  véletlen változók *kovarianciája*

$$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))(\eta - \mathbf{E}(\eta))],$$

*korrelációja*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)}.$$

# Tulajdonságok

## Állítás

*Tetszőleges  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta, \eta_1, \dots, \eta_m$  véletlen változók és  $a, b$  valós számok esetén igazak az alábbiak.*

- (i)  $\mathbf{Cov}(\xi, \xi) = \mathbf{D}^2(\xi)$ ;
- (ii)  $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{Cov}(\eta, \xi)$ ;
- (iii)  $\mathbf{Cov}(a(\xi + c), b(\eta + d)) = ab\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ ;
- (iv)  $\mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^m \eta_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{Cov}(\xi_i, \eta_j)$ ;
- (v) *ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor  $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = 0$ .*

## Állítás

(i) *Bunyakovszkij–Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség:*

$$|\mathbf{Cov}(\xi, \eta)| \leq \mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta).$$

*Innen adódik, hogy  $\rho(\xi, \eta) \in [-1, 1]$ ;*

(ii) *ha  $\rho(\xi, \eta) = 1$ , akkor*

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) + \frac{\mathbf{D}(\xi)}{\mathbf{D}(\eta)}(\eta - \mathbf{E}(\eta));$$

(iii) *ha  $\rho(\xi, \eta) = -1$ , akkor*

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) - \frac{\mathbf{D}(\xi)}{\mathbf{D}(\eta)}(\eta - \mathbf{E}(\eta)).$$





# Összeg szórásnégyzete

## Állítás

*Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  páronként független véletlen változók.  
Ekkor*

$$\mathbf{D}^2 \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2(\xi_i).$$

# Összeg szórásnégyzete

Legyenek  $\xi, \eta$  véletlen változók,  $\rho$  a korrelációjuk. Ekkor

$$\mathbf{D}^2(\xi + \eta) =$$

# Kovariancia

## Példa

Egy szabályos dobókockával  $n$ -szer dobunk. Jelölje  $\xi$  a hatosok,  $\eta$  egyesek számát! Adjuk meg a várható értéket, szórást, kovarianciát, korrelációt!

Legyen  $I_i = 1$ , ha az  $i$ -edik dobás hatos, különben 0,  $J_i = 1$ , ha az  $i$ -edik dobás egyes, különben 0,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Nyilván

$$\xi = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{és} \quad \eta = \sum_{i=1}^n J_i.$$



