A sztochasztika alapjai
MBNXK262

5. előadás: Nevezetes diszkrét eloszlások, Folytonos véletlen változók

Kevei Péter

2023/24 tavasz

Ismétlés: véletlen változó, eloszlásfüggvény

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező
$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ függvény *véletlen változó*
eloszlásfüggvénye
$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \; x \in \mathbb{R}$

Ismétlés: diszkrét véletlen változó

ξ *diszkrét*, ha lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.
várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

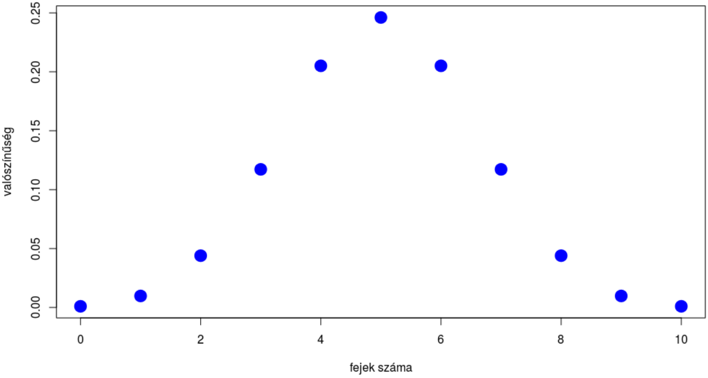
szórása

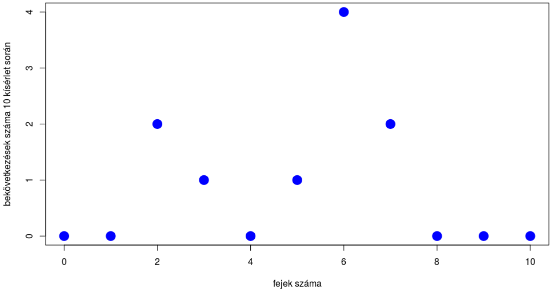
$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

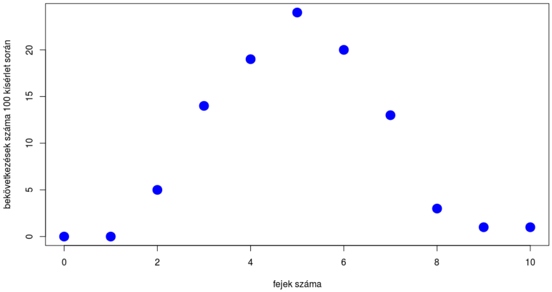
Ismétlés: Bernoulli-eloszlás, binomiális eloszlás

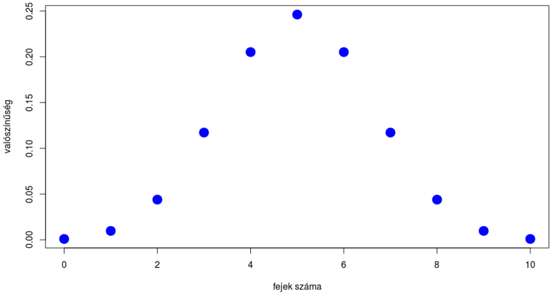
ξ *p paraméterű Bernoulli-eloszlású*, $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0,1]$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és $\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$.
ξ *(n, p) paraméterű binomiális eloszlású*, $\xi \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in [0,1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
Pl: 10-szer dobok egy kockával, hatosok száma; 5-ször dobok egy érmével, a fejek száma, $\ldots$

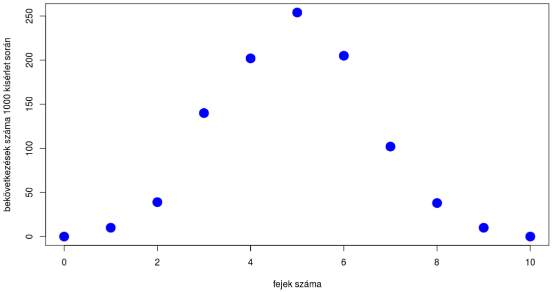
Binomiális eloszlás$(10, 1/2)$



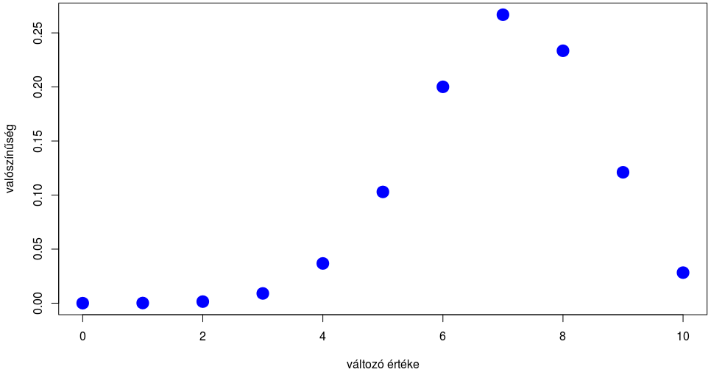

beKövetkezések száma 10 kísérlet során
fejek száma
0
2
4
6
8
10
0
1
2
3
4


beKövetkezések száma 100 kísérlet során
fejek száma
0
2
4
6
8
10
0
5
10
15
20


valószínűség
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
2
4
6
8
10
fejek száma


bekövetkezések száma 1000 kísérlet során
0
50
100
150
200
250
0
2
4
6
8
10
fejek száma

Binomiális eloszlás$(10, 0.7)$ (nem szimmetrikus)

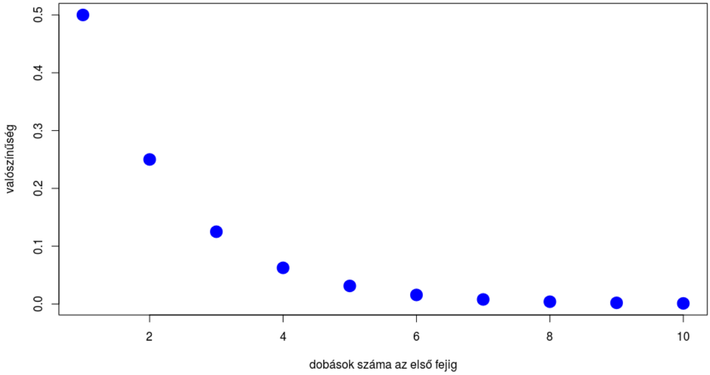


Geometriai eloszlás

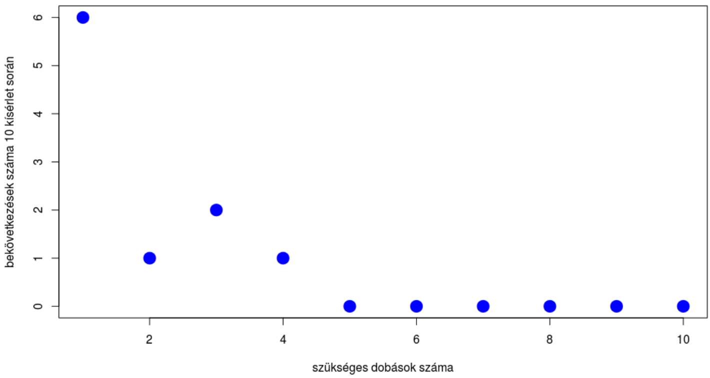
Az ξ véletlen változó *p paraméterű geometriai eloszlású*, $\xi \sim \text{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \ldots$ és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Geometriai eloszlás(1/2)



Szimuláció: Geometriai eloszlás(1/2), $N = 10$



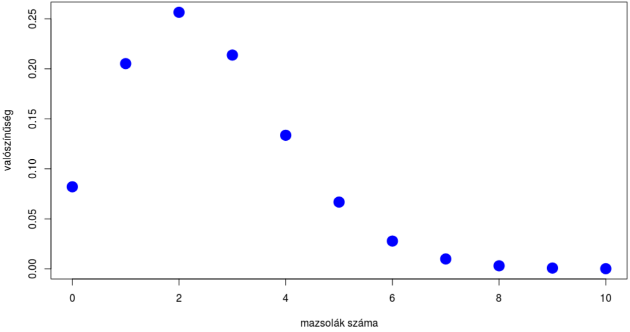
Tipikus példa: addig ismétlünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.
Diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi > k + \ell | \xi > k) &= \frac{\mathbf{P}(\xi > k + \ell)}{\mathbf{P}(\xi > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(\xi > \ell). \end{aligned}$$

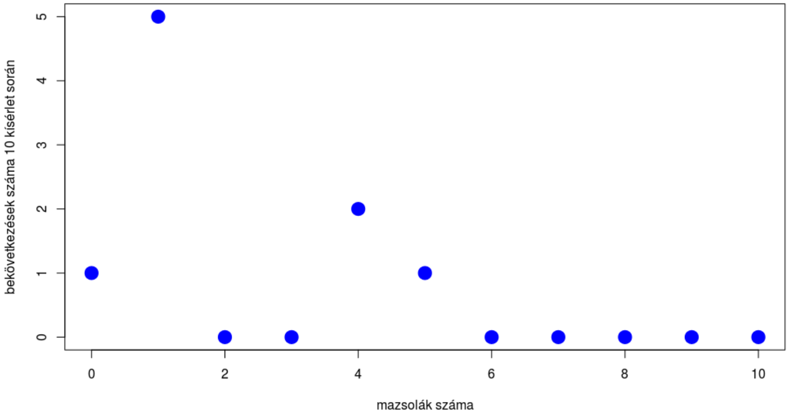
Nevezetes eloszlások: Poisson-eloszlás

ξ λ *paraméterű Poisson-eloszlású*, $\xi \sim$ Poisson(λ), $\lambda \geq 0$, ha ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$



Poisson-eloszlás szimuláció



A $\lambda = 2.5$ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó szimulációja $N = 10$-szer

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- téves telefonhívások száma;
- autóbalesetek száma;
- nyomdahubák száma egy oldalon;
- földrengések száma;
- csillagok száma egy adott térrészben;
- mazsolák száma a pudingban;
- programhibák száma egy kódban;
- halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz)

Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy

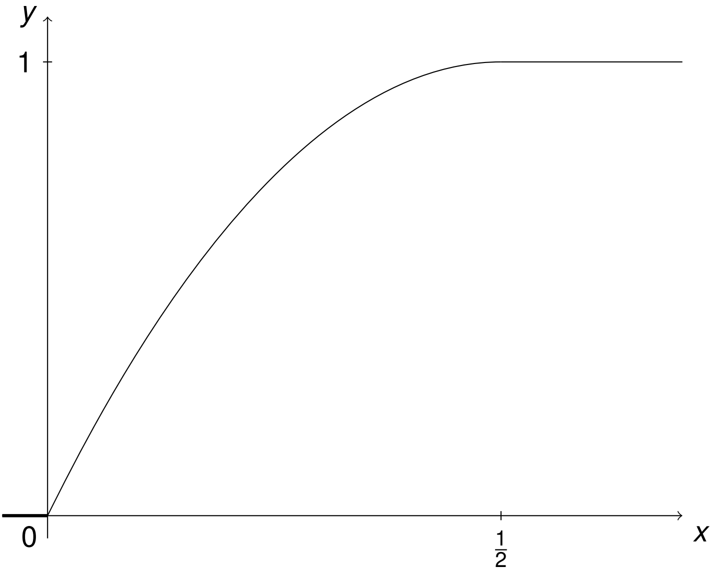
$$\mathbf{P}(\xi \in (a,b)) = \mathbf{P}(\xi \in (a,b]) = \int_{a}^{b} f(y)\mathrm{d}y.$$

Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(\xi = x) = \int_{x}^{x} f(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

Eloszlásfüggvény



Példa

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1-x), & \text{ha } 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & \text{ha } x \ge 1/2, \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

ahol

$$f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x(4 - 8x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

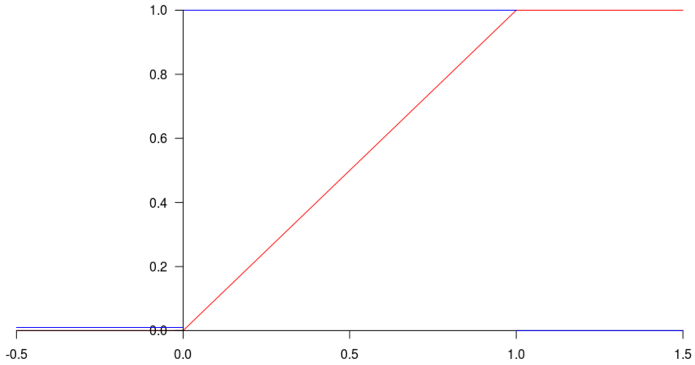
$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^2(4 - 8x) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Tehát $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{24} - \frac{1}{36}} \approx 0,118.$

Egyenletes eloszlás

ξ *egyenletes eloszlású az* (a, b) *intervallumon*, $\xi \sim \text{Egy}(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

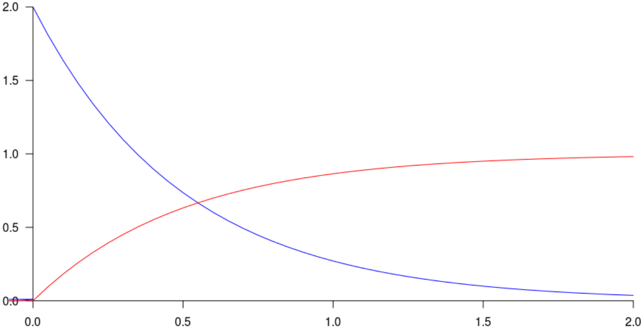
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Exponenciális eloszlás

ξ λ-*paraméterű exponenciális eloszlású*, $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

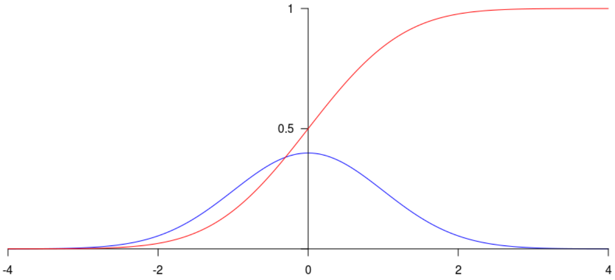

2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Momentumok

Normális eloszlás

ξ *normális eloszlású* μ *és* σ^2 *paraméterekkel*, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu,\sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$


1
0.5
-4
-2
0
2
4

Standardizálás

Állítás

Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, *akkor* $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

$\xi \sim$ N(μ, σ^2) és $Z \sim$ N$(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|\xi - \mu| \le \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \le \lambda) \\
&= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\
&= 2\Phi(\lambda) - 1 \\
&= \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Várható érték

Várható érték

Definíció

ξ diszkrét $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. ξ *várható értéke*

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$.
Ha ξ folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor ξ várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) \mathrm{d}y,$$

ha $\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) \mathrm{d}y < \infty$.

Várható érték tulajdonságai

Állítás

ξ, η véletlen változók, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathbf{E}(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbf{P}(\xi = x_i), \text{ ill. } \mathbf{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)\mathrm{d}y,$$

ahol $f(x)$ az ξ sűrűségfüggvénye, és

$$\mathbf{E}(h(\xi, \eta)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

A várható érték lineáris, azaz tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ állandókra

$$\mathbf{E}(a\xi + b) = a\mathbf{E}(\xi) + b.$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

Ha $a \leq \xi \leq b$*, akkor* $a \leq \mathbf{E}(\xi) \leq b$ *tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *számok esetén.*

Várható érték tulajdonságai

Állítás

$\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}(\xi) + \mathbf{E}(\eta)$.

Várható érték tulajdonságai

Állítás

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *véletlen változók, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i).$$

Várható érték tulajdonságai

Állítás

Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbf{E}\left(g_1(\xi)g_2(\eta)\right) = \mathbf{E}\left(g_1(\xi)\right)\mathbf{E}\left(g_2(\eta)\right)$*. Speciálisan, ha ξ és η függetlenek, akkor* $\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta)$*.*

Példa

Csodaország munka törvénykönyve szerint egy cég minden munkása fizetett szabadságot kap azokon a napokon, amikor legalább az egyiküknek születésnapja van. Ezen napok kivételével azonban az év minden napján mindenkinek dolgoznia kell. Minden munkás 1 TV-készüléket készít egy nap alatt. Hány alkalmazottat vegyen fel a cégtulajdonos, ha azt akarja, hogy a gyártott TV-készülékek számának a várható értéke maximális legyen?

Csodaország

Csodaország