A sztochasztika alapjai
MBNXK262

4. előadás: Függetlenség; Diszkrét véletlen változók

Kevei Péter

2023/24 tavasz

Függetlenség

A B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Definíció

Az A és B események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- a függetlenség szimmetrikus
- a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független HF

Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. D: dámát húzunk, K kőrt húzunk.

Három esemény függetlensége

Definíció

Az A, B, C események **függetlenek**, ha

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$,
- és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Több esemény függetlensége

Definíció

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

Állítás

Ha az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az $\{A_1, \ldots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \ldots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.

Pl. ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek. HF

Bináris szimmetrikus csatorna

- $0 - 1$ sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- a csatorna minden bitet egymástól függetlenül p valószínűséggel elront

P(5 bit hiba nélkül átmegy) $=$

Ha $p = 0,1$, akkor ez $0,59$, míg $p = 0,2$ esetén csak $0,33$.

Bináris szimmetrikus csatorna

Minden bitet háromszor küldünk el, tehát a 0 helyett 000, az 1 helyett 111.

$$\begin{aligned} p' &= \mathbf{P}(\text{ hibásan dekódol }) \\ &= \mathbf{P}(\text{ pontosan 2 bit fordul át }) + \mathbf{P}(\text{ mindhárom átfordul }) \\ &= \end{aligned}$$

Ha $p =$0,1, akkor $p' =$0,028.

$$\mathbf{P}(\text{ 5 bitnyi üzenet háromszorozva hiba nélkül átmegy })$$
$$= (1 - p')^5 = \left(1 - 3p^2 + 2p^3\right)^5.$$

0,86, ha $p =$0,1.

Véletlen változó

Definíció

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az

$$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt *véletlen változónak* nevezzük, ha a

$$\xi^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega : \xi(\omega) < a\}$$

inverzkép $\mathcal{A}$-beli tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén.

- dobókockával dobott szám értéke;
- három kockával dobunk, akkor a legkisebb dobott szám;
- az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám;
- egy szelvényen elért találatok száma;
- egységnégyzetben egyenletesen választott pont milyen távol van a négyzet határától

Eloszlásfüggvény

Definíció

A ξ véletlen változó *eloszlásfüggvénye* az

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), \ x \in \mathbb{R},$$

függvény.

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Tétel (Eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Legyen $F(x)$ *egy* ξ *véletlen változó eloszlásfüggvénye. Ekkor*

(i) F *monoton nemcsökkenő;*

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *és* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$*;*

(iii) F *balról folytonos.*

Eloszlásfüggvény tulajdonságai

Monoton nemcsökkenő:

Diszkrét véletlen változók

ξ *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) > 0$ a változó eloszlása.
A ξ diszkrét véletlen változó várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_i x_i \mathbf{P}(\xi = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(\xi = x_i) < \infty$. A ξ szórása

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}(\xi))^2]} = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

Ha (p_i) eloszlás, akkor $\sum_i p_i = 1$. Az eloszlásfüggvény $F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$.

Dobókockával dobott szám

Legyen ξ a dobókockán dobott szám értéke. Ekkor ξ lehetséges értékei $1, 2, \ldots, 6$, és

$$\mathbf{P}(\xi = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

$$\mathbf{E}(\xi) =$$

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2,$$

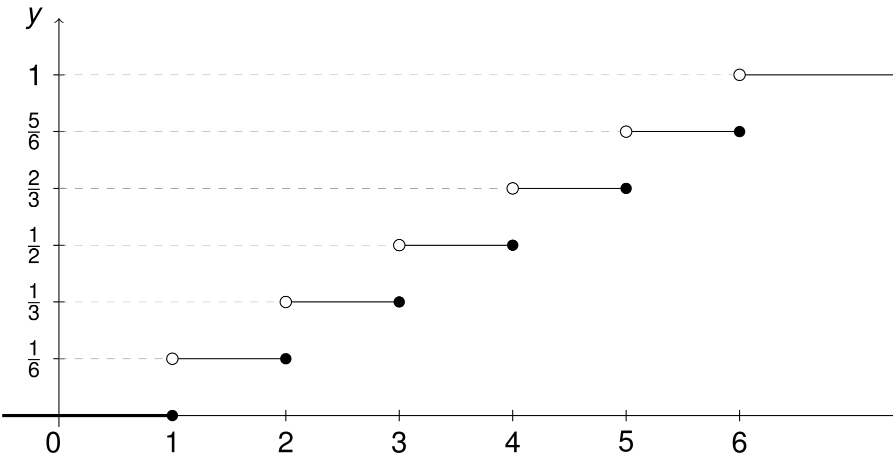
$$\mathbf{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \mathbf{P}(\xi^2 = k^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6},$$

így $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{91 - (3,5)^2} \approx 1,7.$

Dobókockával dobott szám

$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dobókockával dobott szám



Nevezetes eloszlások: Bernoulli-eloszlás

ξ véletlen változó *p paraméterű Bernoulli-eloszlású*, $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és $\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$.

Nevezetes eloszlások: Binomiális eloszlás

Az ξ véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $\xi \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$, és $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Bernoulli és binomiális

Állítás

Legyenek $I_1, \ldots, I_n$ független, Bernoulli(p) eloszlású véletlen változók. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} I_i$ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel.

Geometriai eloszlás

Az ξ véletlen változó *p paraméterű geometriai eloszlású*, $\xi \sim \mathrm{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \ldots$ és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tipikus példa: addig ismétlünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.
Diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi > k + \ell | \xi > k) &= \frac{\mathbf{P}(\xi > k + \ell)}{\mathbf{P}(\xi > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}(\xi > \ell).\end{aligned}$$

Nevezetes eloszlások: Poisson-eloszlás

ξ λ *paraméterű Poisson-eloszlású*, $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, ha ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$, és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Poisson és binomiális

Legyen $p = p_n = \lambda/n$, $\lambda > 0$, és $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- téves telefonhívások száma;
- autóbalesetek száma;
- nyomdahubák száma egy oldalon;
- földrengések száma;
- csillagok száma egy adott térrészben;
- mazsolák száma a pudingban.
- halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (Bortkiewicz)

Folytonos véletlen változók

Definíció

Egy ξ véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy

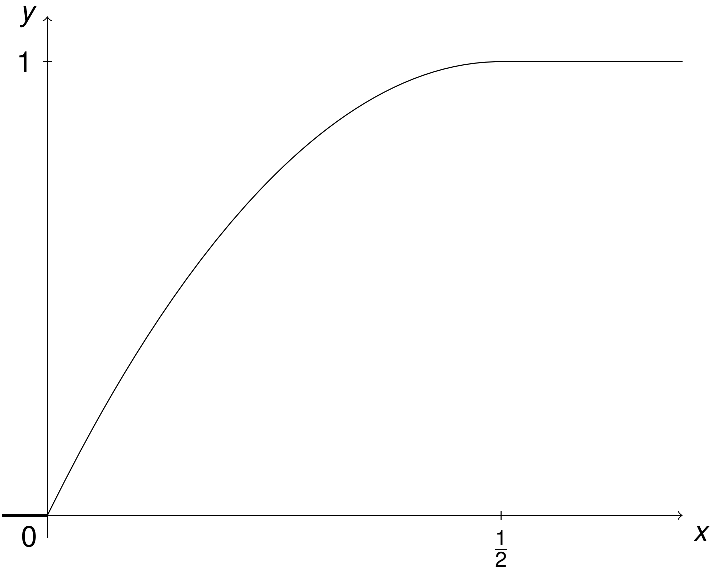
$$\mathbf{P}(\xi \in (a,b)) = \mathbf{P}(\xi \in (a,b]) = \int_{a}^{b} f(y)\mathrm{d}y.$$

Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}(\xi \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(\xi = x) = \int_{x}^{x} f(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

Eloszlásfüggvény



Példa

Egységnégyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot. Adjuk meg a pont a négyzet határától vett távolságának eloszlását!

$$
\begin{aligned}
F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) &= \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 4x(1-x), & \text{ha } 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & \text{ha } x \ge 1/2, \end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}
$$

$$f(y) = \begin{cases} 4 - 8y, & \text{ha } y \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x(4 - 8x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x^2(4 - 8x) \mathrm{d}x = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Tehát $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{24} - \frac{1}{36}} \approx 0,118$.