# A sztochasztika alapjai
# MBNXK262

## 3. előadás: Feltételes valószínűség, függetlenség

Kevei Péter

2023/24 tavasz

# Ismétlés

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $A, B$ események, és $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az $A$ esemény $B$ eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

## Állítás

*Rögzítsünk egy tetszőleges $B$ eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték $\mathcal{A}$-n.*

## Állítás (Szorzási szabály)

*Legyenek* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *tetszőleges olyan események, melyekre* $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$*. Ekkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

$n = 2$-re:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

## Példa

Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?
Jelölje $K_i$ azt, hogy az $i$-edik kék. Ekkor

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) =$$

# Teljes eseményrendszer

### Definíció

A $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

## Tétel (Teljes valószínűség tétele)

*Legyen* $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszer, melyre* $\mathbf{P}(B_n) > 0$ *minden* $n$*-re. Ekkor tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *esemény esetén*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

# Szindbád

Szindbádnak jogában áll $N$ háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat.

- mindig csak az éppen akkor elvonuló lányt választhatja
- egyértelmű szépségi sorrendje van
- bármely elvonulási sorrend egyformán valószínű

*Stratégia:* Szindbád $k$ lányt elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen $k$ esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha $N$ elég nagy?

# Szindbád

Jelölje $A_i$ azt az eseményt, hogy a $i$-edik lány a legszebb, $i = 1, 2, \ldots, N$, és $B$ azt, hogy Szindbád a legszebb lányt választja.

# Szindbád

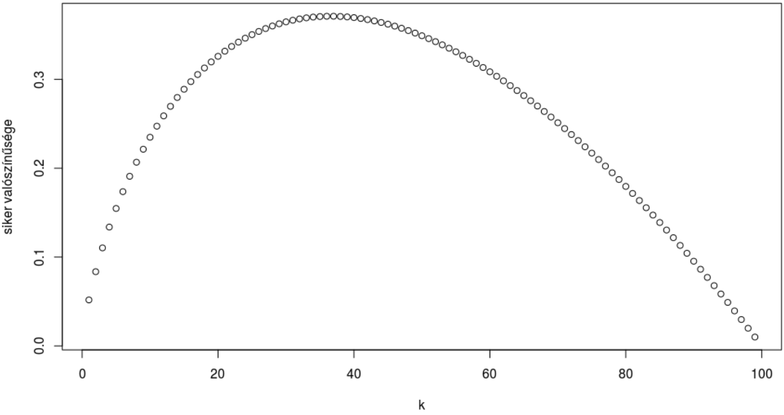
Ha $i > k$, akkor Szindbád pontosan akkor választja a legszebbet, ha az első $i - 1$ lány közül a legszebb az első $k$-ban volt.
Tehát

$$\mathbf{P}(B|A_i) = \frac{k}{i-1}.$$

Összegezve

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B|A_i) = \sum_{i=k+1}^{N} \frac{1}{N}\frac{k}{i-1}.$$

# Szindbád




ábra: A siker valószínűsége $k$ függvényében, $N = 100$

# Szindbád

És ez mennyi?

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Integrálközelítő összeg becslése integrállal:

$$\log \frac{N}{k} = \int_k^N \frac{1}{x} \mathrm{d}x \le \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \le \int_{k-1}^{N-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log \frac{N-1}{k-1}.$$

Tehát

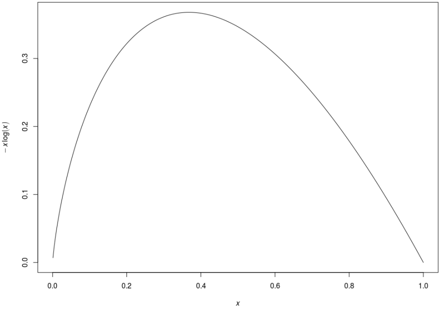
$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

# Szindbád

Hogy válassza Szindbád $k$-t?

$$\mathbf{P}(B) \sim \frac{k}{N} \log \frac{N}{k}.$$

Az $f(x) = x \log \frac{1}{x}$ függvény maximuma kell $[0, 1]$-en. HF
Maximumhely $x = 1/e$,
maximum értéke: $1/e$,
tehát $k = [N/e]$.



# Szindbád

- Szindbád megtudja $N$-et.
- Elenged $k = [N/e]$ lányt.
- Majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes eddiginél.
- Ekkor nagyjából $1/e \approx 0,368$ valószínűséggel a legszebbbbet választja.

# Bayes-formula

**Tétel**

*Legyenek $A$ és $B$ olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

# Bayes-tétel

## Tétel

*Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden $n$-re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges $k$-ra*

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

# Monty Hall probléma

- játékos: 3 csukott ajtó közül 1-et választ
- 2 mögött kecske, 1 mögött autó
- Miután választ, a játékvezető kinyittat egy ajtót, amit nem választott a játékos, és ami mögött kecske van.
- Ezután felajánlja a játékosnak, hogy cserélhet ajtót.
- Megéri-e váltani?

# Monty Hall probléma

Tfh a játékos az 1-est választotta, a játékvezető a 2-est nyittatta ki. $A_i$: az autó az $i$-edik ajtó mögött van, $B$ : játékvezető a 2-es ajtót nyittatta ki.

# Doppingteszt

- doppingolók 99%-ánál pozitív
- nem doppingoló 1%-nál tévesen pozitív

Tfh a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

(a) doppingtesztje pozitív?

(b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

$T$: a teszt eredménye pozitív; $D$: a sportoló doppingolt

# Doppingteszt

$T$: a teszt eredménye pozitív; $D$: a sportoló doppingolt

# Véletlenített válaszadás

- Kérdőívet készítünk, melyen kínos kérdések is vannak.
- A kínos kérdésnél a kitöltő feldob egy (szabályos) pénzérmét. Ha fejet kap, akkor válaszoljon igennel, ha írást, akkor válaszoljon arra a kérdésre, hogy énekel-e a zuhany alatt.

Az emberek (ismeretlen!) $p$ hányada énekel a zuhany alatt.

- Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt kitöltése során valaki igennel válaszol?
- Az igen válaszok arányából hogy következtethetünk a valódi $p$ arányra?

# Véletlenített válaszadás

$I$: a válasz igen, $A$ a kitöltő énekel a zuhany alatt. $\mathbf{P}(A) = p$

$$\mathbf{P}(I|A) =$$

$$\mathbf{P}(I|A^c) =$$

$$\mathbf{P}(I) =$$

# Függetlenség

A $B$ esemény bekövetkezése nem befolyásolja az $A$ bekövetkezését, ha

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A),$$

ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

### Definíció

Az $A$ és $B$ események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

### Definíció

Az $A$ és $B$ események függetlenek, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

- a függetlenség szimmetrikus
- a biztos és a lehetetlen eseménytől minden esemény független HF

## Példa

Francia kártyapakliból húzunk egy lapot. $D$: dámát húzunk, $K$ kőrt húzunk.

Ekkor $D \cap K$ az az esemény, hogy a kőr dámát húztuk ki, így $\mathbf{P}(D \cap K) = 1/52$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(D) = 4/52 = 1/13$ és $\mathbf{P}(K) = 13/52 = 1/4$, azaz a két esemény független.

# Három esemény függetlensége

### Definíció

Az $A, B, C$ események **függetlenek**, ha

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$,
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$,
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$,
- és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Továbbá, az $A, B, C$ események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

# Több esemény függetlensége

## Definíció

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

## Állítás

*Ha az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az $\{A_1, \ldots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \ldots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.*

Pl. ha $A, B, C, D$ független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek. HF

# Bináris szimmetrikus csatorna

- $0-1$ sorozatot akarunk küldeni zajos csatornán
- a csatorna minden bitet egymástól függetlenül $p$ valószínűséggel elront

**P**( 5 bit hiba nélkül átmegy ) $=$

Ha $p = 0,1$, akkor ez $0,59$, míg $p = 0,2$ esetén csak $0,33$.

# Bináris szimmetrikus csatorna

Minden bitet háromszor küldünk el, tehát a 0 helyett 000, az 1 helyett 111.

$$\begin{aligned} p' &= \mathbf{P}(\text{ hibásan dekódol }) \\ &= \mathbf{P}(\text{ pontosan 2 bit fordul át }) + \mathbf{P}(\text{ mindhárom átfordul }) \\ &= \end{aligned}$$

Ha $p =$0,1, akkor $p' =$0,028.

$$\mathbf{P}(\text{ 5 bitnyi üzenet háromszorozva hiba nélkül átmegy })$$
$$= (1 - p')^5 = \left(1 - 3p^2 + 2p^3\right)^5.$$

0,86, ha $p =$0,1.