A sztochasztika alapjai
MBNXK262

1. előadás: Valószínűségi mező

Kevei Péter

2023/24 tavasz

Követelmények

Gyakorlat: folyamatos számonkérésű kurzus

- részvétel kötelező (legfeljebb 3 hiányzás)
- 6 dolgozat, legjobb 5 számít
- egyéb javítási lehetőség nincs
- nincs gyakorlati UV

Előadás: az vizsgázhat, aki teljesíti a gyakorlatot

- 12 db 5 pontos Coospace teszt - legjobb 10 számít
- megajánlott jegy: aki legalább 30 pontot szerez a teszteken, annak a 4-es, 5-ös gyakorlati jegyet megajánlom 3-as, 4-es vizsgajegynek, a 3-as gyakorlati jegyet felajánlom 2-es vizsgajegynek
- Coospace vizsga (elmélet + feladatok) 75%, Coospace tesztek 25%

A kurzusról

Sztochasztika: véletlen matematikája, véletlen tömegjelenségek törvényszerűségei
Szükséges előismeretek:

- Kalkulus I. előfeltétel
- kombinatorika (középiskola, Diszkrét matematika II)
- műveletek halmazokkal (középiskola, DiMat I)

Mihez kell?

- Alkalmazott statisztika tárgy előfeltétele
- mesterséges intelligencia (23/24 őszi MestInt tételsor 30 tétele közül 10 valszám)
- Neurális hálózatok, Gépi tanulás kurzusok
- algoritmusok futási idejének elemzése (véletlen input)
- információelmélet (üzenetküldés zajos csatornán)

Segédanyag

- Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak, elektronikus jegyzet, előadás anyaga
- Kevei Péter: A sztochasztika alapjai informatikusoknak feladatgyűjtemény, gyakorlatra feladatok, minden témában néhány részletes megoldásával
- Szabó Tamás, Szalai Máté, Szűcs Gábor: Youtube videók feladatmegoldásokról
- Viharos László: jegyzetvázlat
- Viharos László: A sztochasztika alapjai, Polygon

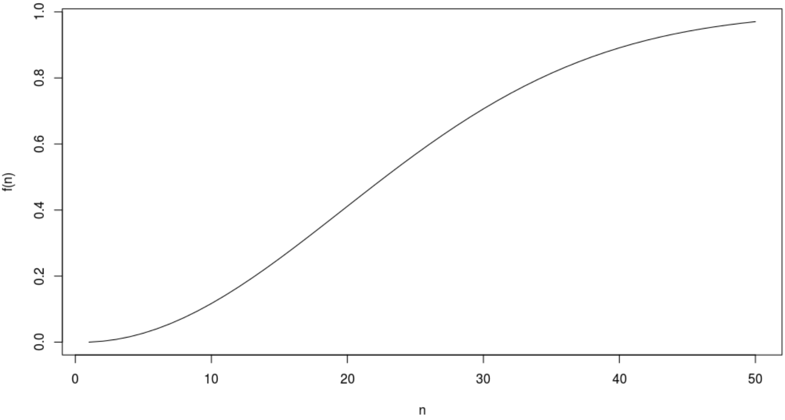
Születésnap probléma

Mekkora a valószínűsége annak, hogy n ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

$$f(n) = \mathbf{P}\big(n \text{ ember között van 2, akiknek} \\ \text{ugyanazon a napon van a születésnapja}\big).$$

Születésnap probléma

Születésnap probléma



Születésnap probléma - N kimenetel

Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetelt.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω.

Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetelt.
A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω. Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, mely σ-algebra. Az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt mérhetőségi térnek nevezzük.

σ-algebra

Definíció

Egy $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ halmazrendszert akkor nevezünk σ**-algebrának**, ha

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- valahányszor $A \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- valahányszor $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

Megjegyzés

- Vegyük észre, hogy a $\{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer σ-algebra. Ez a triviális σ-algebra.
- A 2^{Ω} halmazrendszer, az Ω hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is σ-algebra. Abban az esetben, amikor az Ω alaphalmaz véges, akkor az események halmaza általában a hatványhalmaz.

Események

Események jelölése: $A, B, A_1, \ldots$.

- $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, elemi esemény
- $\emptyset$ a lehetetlen esemény
- Ω a biztos esemény
- A^c az ellentett esemény
- $A \cap B$ mindkét esemény bekövetkezik (A és B)
- $A \cup B$ a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- $A \cap B = \emptyset$ a két esemény kizárja egymást
- $A \setminus B$ a bekövetkezik de B nem
- $A \subset B$ az A esemény maga után vonja B-t

Valószínűségi mérték

Definíció

Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ halmazfüggvény *valószínűségi mérték* az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi téren, ha

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ha az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok (páronként) diszjunktak, akkor
  $$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$
  azaz a halmazfüggvény σ-additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

Példa

Földobunk egy pénzérmét. Lehetséges kimenetelek F, I, tehát

$$\Omega = \{F, I\}.$$

Események

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{F\}, \{I\}, \{F, I\}\}.$$

Ekkor $|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|} = 4$. (Általában egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.)

Szabályos az érme: $\mathbf{P}(\{F\}) = \mathbf{P}(\{I\}) = \frac{1}{2}$.

Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F,F),(F,I),(I,F),(I,I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$ az összes esemény száma és

$$\begin{aligned}2^\Omega = \Big\{&\emptyset, \{(F,F)\}, \{(F,I)\}, \{(I,F)\}, \{(I,I)\},\\
&\{(F,F),(F,I)\}, \{(F,F),(I,F)\}, \{(F,F),(I,I)\},\\
&\{(F,I),(I,F)\}, \{(F,I),(I,I)\}, \{(I,F),(I,I)\},\\
&\{(F,F),(F,I),(I,F)\}, \{(F,F),(F,I),(I,I)\},\\
&\{(F,F),(I,F),(I,I)\}, \{(I,F),(F,I),(I,I)\},\\
&\{(F,F),(F,I),(I,F),(I,I)\}\Big\}.\end{aligned}$$

Példa

Kétszer földobunk egy pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$. Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2$. Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

Továbbá

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I)\} = A_1 \cap A_2^c$$
$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c$$

Példa

Kétszer földobunk egy *szabályos* pénzérmét. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{(F, F), (F, I), (I, F), (I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^2 = 4$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^4 = 16$. Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2$. Ekkor

$$A_1 = \{(F, F), (F, I)\}, \quad A_2 = \{(F, F), (I, F)\}.$$

$\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{4}$

Példa

Tízszer földobunk egy pénzérmét.

Példa

Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit. Mennyi a valószínűsége, hogy a matematika szót kapjuk?

Klasszikus valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$ valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Ekkor persze szükségképpen $c = 1/|\Omega|$. Tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$.

Újra születésnap

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \ldots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \, : \omega_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\} \, .\end{aligned}$$

Az események halmaza $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, a hatványhalmaz.
$\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Újra születésnap

Példa

Az eseménytér:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \ldots, 365\}^n \\ &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}.\end{aligned}$$

Az események halmaza $\mathcal{A} = 2^\Omega$, a hatványhalmaz.
A keresett esemény:

$$\begin{aligned}&\{\text{van kettő azonos születésnap}\} \\ &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.\end{aligned}$$

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

Legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. *Ha* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *minden* $i \neq j$ *párra, akkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n).$$

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

A valószínűség tulajdonságai

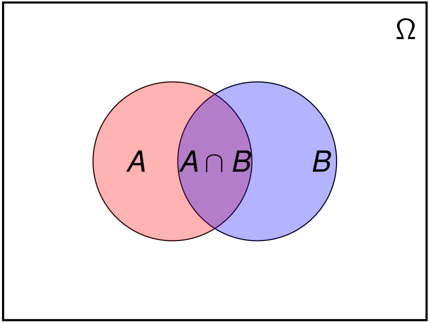
Állítás

$A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, *és* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$



A valószínűség tulajdonságai

Állítás

Szitaformula:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

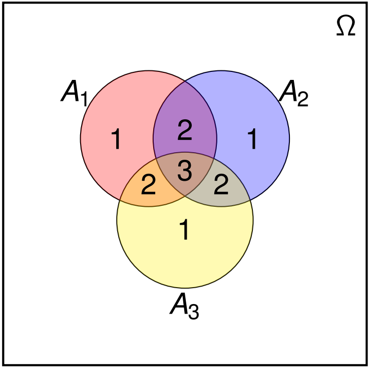
Ez $n = 2$-re:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2),$$

A valószínűség tulajdonságai

és $n = 3$-ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\ &\quad - (\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$



A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség tulajdonságai

Állítás

$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Állítás

$\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)$.

Teljes indukcióval.