Valószínűségszámítás

8. feladatsor: CHT, feltételes, Borel–Cantelli lemma

1. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

2. Magyarországon, és mindenütt a világon, több fiúgyermek születik, mint lány. Az újszülöttek 52%-a fiú, 48%-a lány. Nevezzük *lányos napoknak/heteknek* azokat a napokat/heteket, amikor több lány születik, mint fiú.

(a) Szegeden naponta 9 gyermek születik. Mennyi a pontos valószínűsége, hogy Szegeden egy adott nap lányos nap? Milyen eloszlású az egy héten bekövetkezett lányos napok száma? Várhatóan hány lányos nap van egy héten?

(b) Budapesten naponta 100 gyermek születik. Mennyi a közelítő (normális közelítés, de Moivre–Laplace-tétel) valószínűsége, hogy Budapesten egy adott nap lányos nap?

(c) Egész Magyarországon egy héten 2500 gyermek születik. Mennyi a lányos hét bekövetkezésének közelítő valószínűsége? Várhatóan hány lányos hét lesz 2020-ban? Adjuk meg annak a közelítő valószínűségét (Poisson-közelítés), hogy legalább 3 lányos hét lesz 2020-ban.

3. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek 5/6 valószínűséggel A menüt, 1/6 valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

4. Egy szerencsejátékon a nyerési esélyed 1/11. Ha nyersz, visszakapod a feltett tétet és még nyereményként annak kilencszeresét. Elegendő sok kezdőtőkével indulva ezer alkalommal felteszel 1–1 petákot. Mi a valószínűsége, hogy ezer játszma után még legalább annyi pénzed van, mint kezdetben volt?

5. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?

6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók. Igazoljuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1 \quad \text{m.b.}$$

7. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független nemnegatív egész értékű véletlen változók. Mutassuk meg, hogy az $X_1 + X_2 + \cdots$ sor akkor és csakis akkor konvergens m.b., ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > 0) < \infty\,.$$

8. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, melyekre $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$. Igazoljuk, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, de $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$ majdnem biztosan.

9. Mutassuk meg, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával!

10. Egyenletes eloszlás szerint választok egy p értéket a $[0, 1]$ intervallumon, majd gyártok egy olyan érmét, mely p valószínűséggel ad fejet. Jelölje X annak a dobásnak a sorszámát, mikor először dobok fejet. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét. Ugyanez lesz a várható érték, ha egy olyan érmét dobálok, mely $\mathbf{E}(p)$ valószínűséggel ad fejet?

11. Legyen az (X, Y) véletlen vektorváltozó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett! Számítsuk ki az $\mathbf{E}[Y^2|X = x]$ feltételes várható értéket.

12. Legyenek X, Y független 1 paraméterű exponenciális eloszlású véletlen változók. Legyen $U = X \wedge Y$, $V = X \vee Y$. Határozzuk meg a maximum minimumra vett feltételes sűrűségét, és fordítva, azaz adjuk meg a $g_{U|V}(u|v)$, $g_{V|U}(v|u)$ feltételes sűrűségeket! Ismerjünk rá a kapott eloszlásokra!

13. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\text{km}^2$.

14. Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, és $X = x$ esetén legyen Y egyenletes eloszlású a $(0, x)$ intervallumon. Adjuk meg (X, Y) eloszlását, a peremeloszlásokat, várható érték vektort és a kovarianciamátrixot!