Valószínűségszámítás

7. feladatsor: nevezetes eloszlások

1. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

2. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

3. A Bajnokok Ligája döntőiben a(z összes) gólok száma Poisson-eloszlást követ. A döntők 20%-án nem esik gól. Várhatóan hány gólt láthatunk egy BL döntőn?

4. Tegyük fel, hogy egy rovar petéinek száma λ-paraméterű Poisson-eloszlást követ, és egy petéből $p \in (0,1)$ valószínűséggel lesz lárva, továbbá a peték egymástól függetlenül fejlődnek lárvává, vagy sem. Mutassuk meg, hogy a lárvák száma λp-paraméterű Poisson-eloszlást követ!

5. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

6. A Texpo áruházakban az i-edik kasszánál egy vásárló percben számolva i paraméterű exponenciális időt tölt el. A kiszolgálási idők az egyes kasszáknál egymástól függetlenek.

(a) András éppen üresen találja az 1-es kasszát. Mennyi a valószínűsége, hogy 2 percen belül végez?

(b) Andrással pontosan egyidőben Béla beáll az ugyancsak üres 2-es kasszához. Mennyi a valószínűsége, hogy mindketten 2 percen belül végeznek? Mennyi a valószínűsége, hogy Béla 2 percen belül végez, de András nem?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyikük 2 percen belül végez? Határozzuk meg a hamarabb végző kiszolgálási idejének eloszlásást! Tehát András és Béla kiszolgálási idejének a minimumára vagyunk kíváncsiak.

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy András végez hamarabb?

7. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

8. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

9. Tegyük fel, hogy Ausztriában a munkavállalók keresete normális eloszlást követ. Tudjuk, hogy a munkavállalók fele keres havi 3000 eurót vagy kevesebbet, míg 5%-uk keres 8000 eurónál többet. Egy törvénytervezet szerint változna az adókulcs az 5000 eurónál többet keresők számára. A munkavállalók mekkora hányadát érinti ez a változtatás?

10. Legyen X pozitív egész értékű véletlen változó, melyre teljesül a diszkrét örökifjú tulajdonság, azaz

$$\mathbf{P}(X > k + l | X > l) = \mathbf{P}(X > k).$$

Mutassuk meg, hogy $X \sim \mathrm{Geom}(p)$!

11. Diszkrét örökifjúból folytonosat. Legyen $X_n \sim \mathrm{Geom}(\lambda/n)$. Határozzuk meg X_n/n határeloszlását, azaz adjuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right)$$

határértéket minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független $(0, 1)$-en egyenletes eloszlású véletlen változók, jelölje $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ a minimumukat. Mutassuk meg, hogy

(a) $m_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$;

(b) $\mathbf{P}(nm_n > x) \to e^{-x}$;

13. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független $\mathrm{Exp}(1)$ eloszlású véletlen változók. Jelölje $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Igazoljuk, hogy

$$H_n(x) = \mathbf{P}(M_n - \log n \leq x) \Rightarrow H(x) = e^{-e^{-x}}.$$

14. Folytonos örökifjúból diszkrétet. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg $\lfloor X \rfloor$ eloszlását! (A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú.)

15. Legyenek X, Y, Z független exponenciális eloszlású véletlen változók, λ, μ, ν paraméterekkel. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X > Y)$, $\mathbf{P}(X > Y > Z)$ valószínűségeket.

16. Szentpétervári paradoxon. Péter addig dobál egy szabályos érmét, míg fej nem lesz. Ha ez a k-adik dobásra következik be először, akkor fizet Pálnak 2^k dukátot. Adjuk meg Pál nyereményének eloszlását és várható értékét!