Valószínűségszámítás

4. feladatsor: függetlenség, véletlen változók

1. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

2. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

3. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

4. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

5. Egy dobókockával n-szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy az n dobás közt nincs egyes, $m < n$. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

6. Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

7. Ötöslottón egy szelvénnyel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

8. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

9. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám eloszlását!

10. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását?

11. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

12. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Adjuk meg Máté levesében található szegfűszegek számának eloszlását, várható értékét, és szórását!

13. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

14. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen X a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását!

15. Előrejelzések alapján a forint/euró árfolyam 2021. 07. 31.-i eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{(360-x)^2}{9000}, \quad x \in (330, 360).$$

Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy euró 350 Ft-nál többe kerül. Adjuk meg a várható értéket!

16. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Jelölje X azt az időt amennyit a hamarabb végző lány vár a másikra! Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

17. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & \text{ha } x \ge 0. \end{cases}$

18. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

(a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(c) $3^k/k!\mathrm{e}^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

19. Sűrűségfüggvény-e?

(a) $f(x) = (I_{(0,1)}(x) \sin x)/2$;

(b) $f(x) = I_{(1,\infty)}(x) x^{-2}$;

(c) $f(x) = I_{(0,\infty)}(x) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$.

(d) $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

20. Adjunk példát olyan F eloszlásfüggvényre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!

21. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\mathrm{km}^2$.