

## Valószínűségszámítás

### 3. feladatsor: Feltételes valószínűség

1. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár taláalomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

2. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen  $A$  az az esemény, hogy pontosan 2 ászot kaptunk. Határozzuk meg a  $\mathbf{P}(A|B_i)$  feltételes valószínűségeket, ha

- (a)  $B_1$  azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;
- (b)  $B_2$  azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;
- (c)  $B_3$  azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;
- (d)  $B_4$  azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

3. Egy cukrászdában 3 cukrász  $A, B$  és  $C$  süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át  $A$ , 30 %-át  $B$ , 20%-át pedig  $C$  készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy  $A$  sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

4. A koronavírus teszt hatékonysága függ attól, hogy a fertőzött hány napja kapta el a betegséget. Tegyük fel, hogy a fertőzés minden esetben 12 napig tart (ez kb. igaz, ezért van 14 nap karantén). Ha a fertőzött 1 – 3 napja kapta el a betegséget, akkor a teszt ezt nem tudja kimutatni, ha 4 – 5 napja, akkor 0,5 valószínűséggel mutatja ki, ha 6 – 12 napja, akkor 0,75 valószínűséggel (ez nagyjából stimmel). Feltehetjük, hogy egy fertőzött egyén az elmúlt 12 nap bármelyikén egyforma valószínűséggel fertőződött meg.

- (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött egyén tesztje negatív?
- (b) Mivel ez így nem túl hatásos, a következő a szokásos eljárás. A vizsgálandó egyént letesztelik, majd karanténba küldik (ahol elvileg nem fertőződhet meg), és két nap múlva újra letesztelik. Csak akkor engedik ki a karanténból, ha mindkét tesztje negatív. Mekkora a valószínűsége, hogy egy fertőzött mindkét tesztje negatív, és még mindig fertőző? (Vegyünk észre, hogy a betegünk a második teszt után meggyógyulhatott, ha elég régen fertőződött meg.)

5. Aladár hétfő reggelként 7:15-kor indul el otthonról, hogy 8:00-ra beérjen az egyetemre. Gyalog kimegy a buszmegállóba, 20 percet buszozik, aztán villamosra száll át, amelyen 15 percet utazik, végül ismét gyalogol az egyetemig. A buszon 0,5, a villamoson pedig 0,2 valószínűséggel hallja meg, ha csörög a mobiltelefonja, míg gyaloglás közben biztosan észreveszi, ha hívják. Ha hétfő reggel 7:15 és 8:00 között egy véletlen időpontban felhívjuk, és felveszi a telefonját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy épp villamoson van?

6. Két pénzérme közül az egyik szabályos, a másik cinkelt,  $1/4$  valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztjuk az egyiket, majd ezzel kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két fejet kapunk? Ha két fejet kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?

7. Jókedvében Mátyás király kegyelmet ajánl velencei rabjának, ha a rab két egyforma urna közül az egyikből kihúz egy ezüstgolyót. Megengedi neki, hogy 50 ezüst- és 50 aranygolyót úgy

osszon el a két urnába, ahogy akarja. Ezután Mátyás udvari bolondja taláalomra választ egy urnát, a rab pedig abból taláalomra egy golyót. Hogyan ossza el a rab a két urnába a golyókat, ha kedves az élete? Ekkor mekkora az esélye a szabadulásra?

**8.** Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a  $(t, t + h)$  intervallumban, feltéve, hogy  $t$  ideig működött,  $\lambda h + o(h)$ . Határozzuk meg annak a  $p(t)$  valószínűségét, hogy az alkatrész legalább  $t$  ideig működött!

**9.** A sztochasztika tanszék egyik oktatója  $p$  valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Ha ismerőseinek azt mondta, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan  $k$ -an keresik telefonon  $e^{-\mu} \mu^k / k!$ , ha pedig azt mondta, hogy nem, akkor  $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $0 < \lambda < \mu$ . Feltéve, hogy  $k$  hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy aznap bent volt az oktató? Vizsgáljuk a  $k \rightarrow \infty$  esetet.

**10.** Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

**11.** Egy százszemélyes repülőgépen száz ember utazik úgy, hogy mindenkinek van előre kiosztott helye. Az első utas ezzel nem törődve véletlenszerűen leül a száz közül egy helyre. Ezután minden utas a saját helyére próbál leülni, vagy ha az foglalt, véletlenszerűen választ egy másikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a századik utas a helyére ül, ha egyszerre csak egy ember foglal helyet?

**12.** Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy két utca kereszteződésénél találkoznak egy meghatározott időpontban. Elfelejtik megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni a többi sarokra. Mindketten pontosan érkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 2,5 perc után átmennek a szomszédos sarkok valamelyikére,  $1/2-1/2$  valószínűséggel. Ez fél percet vesz igénybe, majd ha megint nem találkoztak, akkor 2,5 perc után megint sarkot váltanak. Először mindketten  $1/4$  valószínűséggel választanak sarkot. Természetesen az is találkozásnak számít, ha egymással szembe jönnek az úttesten.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első percen belül találkoznak?
- (b) Mennyi annak a  $p_n$  valószínűsége, hogy az első  $3n$  percen belül találkoznak?
- (c) Mennyi annak az  $r_n$  valószínűsége, hogy pontosan a  $3n$ -edik percben találkoznak?
- (d) Igazoljuk, hogy egy valószínűséggel véges időn belül találkoznak.

**13.** A parti tüzéség 1 km távolságban felfedez egy ellenséges cirkálót, és elkezd rá tüzelni, percenként egy lövést adva le. A cirkáló az első lövés leadásakor menekülni kezd 60 km/h sebességgel. A találat valószínűsége  $x$  km távolság esetén  $0,75 x^{-2}$ . Ha egy lövés talált, akkor még mindig  $1/4$  valószínűséggel a cirkáló nem süllyed el, és tovább menekül. Mekkora valószínűséggel menekül el a cirkáló?

**14.** Veszünk egy elég nagy urnát, és éjfél előtt fél perccel 1-től 10-ig számozott golyókat rakunk bele, majd rögtön kiveszünk egyet. Éjfél előtt  $1/4$  perccel az urnába 11-től 20-ig számozott golyókat teszünk, majd rögtön kiveszünk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Hány golyó lesz az urnában pontban éjfélkor, ha

- (a) az  $i$ -edik lépésben az  $i$ -edik golyót vesszük ki?
- (b) az  $i$ -edik lépésben a  $10 \cdot i$ -edik golyót vesszük ki?
- (c) véletlenül vesszük ki a golyót?