

Valószínűségszámítás

2. feladatsor: Szita, geometriai valószínűség

1. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \dots\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k -edik próbálkozása sikeres, ha

- (a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?
- (b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

2. Sorban elhelyezett n dobozba taláalomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

3. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n -edik dobásra következik be. Határozzuk meg p_n -et!

4. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

5. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- (a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?
- (b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?
- (c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?
- (d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

6. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

7. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az $x^2 + Xx + Y = 0$ egyenletnek valós gyökei lesznek?

8. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávé. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

- 9.** Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?
- 10.** Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?
- 11.** Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D . Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást?
- 12.** Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?
- 13.** Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?
- 14.** Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?