Valószínűségszámítás

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, kombinatorikus valószínűség

1. Adjuk meg a *lottóhúzást* leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

2. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

3. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal azt az eseményt, hogy az A, B, C események közül pontosan (legalább / legfeljebb) $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be!

4. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

(a) $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$;

(b) $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$;

(c) $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$.

5. Igazoljuk, hogy egy σ-algebra zárt a metszet-, és különbségképzésre; azaz ha $\mathcal{A}$ σ-algebra, és $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

6. Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredménysorozat nem fordul elő?

7. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

8. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

9. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

10. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

11. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

12. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

13. Máté nagymamája meggylevest készít a vasárnapi ebédhez. Összesen 5 szem szegfűszeget tesz a levesbe. A levest 4 egyforma adagra osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy Máté levesében nem lesz szegfűszeg? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3 szegfűszeg lesz a levesében?

14. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

15. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

16. Egy $2n$ lányból és $2n$ fiúból álló társaságot véletlenszerűen két egyenlő létszámú csoportra osztunk. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy a csoportokon belül is megegyezik a lányok és a fiúk száma. Határozzuk meg p_n-et! Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} p_n\sqrt{n}$ határértéket!

17. Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültet egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

18. Egyes vidékeken elterjedt a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy azok a kezéből mindkét irányban kiállnak. Egy másik lány mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat. Ha így egy zárt lánc keletkezik, akkor arra következtetnek, hogy a lány a következő évben férjhez megy. Ha a csomózás teljesen véletlenszerűen történik, mennyi a valószínűsége, hogy zárt láncot kapunk. Mi a helyzet $2n$ fűszál esetén?

19. A Boltzmann–Maxwell-statisztikánál r golyót úgy helyezünk el n dobozba, hogy mind az n^r elhelyezés egyformán valószínű. Határozzuk meg annak a p_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba! Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

20. A Fermi–Dirac-statisztika esetén egy dobozba legfeljebb egy golyó kerülhet, és az összes ilyen $\binom{n}{r}$ elhelyezés egyformán valószínű. (Ez a modell alkalmazható elektronokra, neutronokra és protonokra.) Határozzuk meg annak az r_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba, $k = 0, 1$, és számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

21. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

22. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 kólát vásárolva sikerül kigyűjtenünk a három testvért? (Segítség: a kupakokra gondoljunk úgy mintha egy zsákból húznánk egy nevet, melyben Kevin háromszor, Joe kétszer, Nick pedig egyszer szerepel.)

23. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?